MATEMATIKA 11

II dalis



LEIDĖJŲ ŽODIS

Mieli vienuoliktokai,
šis vadovėlis skirtas pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą. Vadovėlio pirmą dalį sudaro 1 ir 2 skyriai bei dalis 3 skyriaus, antrą — 3 skyriaus tęsinys ir 4 bei 5 skyriai. Pirmuosiuose keturiuose skyriuose dėstoma nauja medžiaga, o penktame skyriuje „Plokštumos geometrija" daugiausia kartojami žinomi planimetrijos kurso dalykai. Kiekvienas skyrius sudarytas iš skyrelių, kuriuose dėstoma teorija, pateikiami išspręsti pavyzdžiai ir duodamos užduotys, kurias turėtumėte atlikti savarankiškai. Beveik kiekvieno skyrelio pabaigoje yra pratimų ir uždavinių, susijusių su prieš tai nagrinėta teorine medžiaga. Spręsdami uždavinius geriau įsiminsite teoriją, giliau suvoksite dalyką. Kaip paprastai, sunkesniųjų uždavinių numeriai nuspalvinti.
Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra kartojimo uždavinių. Spręsdami šiuos uždavinius prisiminsite skyriaus medžiagą. Tarp jų rasite ir geometrijos uždavinių, kuriuos spręsti mokėtės pagrindinėje mokykloje. Geometriją geriausia po truputį kartoti per visus mokslo metus, o ne tik artėjant egzaminui. Kartojimo uždavinių skyrelyje su atskiru pavadinimu „Įvairūs uždaviniai" pateikta uždavinių, kurie nėra tiesiogiai susiję su išnagrinėtu skyriumi. Šiame skirsnyje rasite ir lengvesnių, ir sunkesnių uždavinių. Kai kurių uždavinių sprendimo būdai nėra aptarti teorijoje, taigi juos sprendžiant gali tekti kai ką sugalvoti patiems, galbūt patarimo paklausti mokytojo.
Kam uždavinių pasirodys per mažai, galės pasinaudoti atskira knygele išleistu uždavinynu.
Šį vadovėlį kūrė ne vien autorių kolektyvas, bet ir leidyklos specialistai, konsultantai, eksperimentuojantys mokytojai. Nuoširdžiai dėkojame visiems, prisidėjusiems rengiant vadovėlį.
Prašome savo pastabas, pageidavimus ir pasiūlymus siųsti adresu:
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Vadovėlį rengė autorių kolektyvas:

***Kornelija Intienė*, *Antanas Skūpas*, *Vilius Stakėnas*, *Eugenijus Stankus*, *Vladas Vitkus*.**

Su eksperimentiniu vadovėliu dirbo mokytojai: *R. Biekšienė*, *V. Bartkuvienė*, *K. Intienė*, *M. Jakutienė*, *V. Jankevičienė*, *R. Jonaitienė*, *O. Juodienė*, *A. Karmanova*, *S. Kavaliūnienė*, *R. Klasauskienė*, *I. Knyzelienė*, *R. Kučiauskienė*, *A. Kukučionienė*, *R. Kuliešienė*, *D. Matienė*, *G. Mikalauskienė*, *L. Papuškienė*, *P. Puzinaitė*, *V. Sičiūnienė*, *S. Staknienė*, *V. Stoškuvienė*, *D. Šileikienė*, *A. Šverienė*, *A. Ūsienė*, *V. Viniautienė*, *R. Želvienė*, *R. Žeimienė*.

MATEMATIKA 11

II DALIS

TEV

VILNIUS 2002

UDK 51(075.3)
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota 2002 01 09 Nr. 88

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*, *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*

Kalbos redaktorė *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė*, *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–28–0 (2 dalis)
ISBN 9955–491–23–X (2 dalys)

Turinys

III Funkcijos (tęsinys)
15. Trigonometrinės funkcijos 8
16. Kartojimo uždaviniai 63
17. Skaičių sekos 69
18. Kartojimo uždaviniai 94

IV Įvykiai ir tikimybės
19. Bandymai, baigtys, įvykiai 100
20. Įvykių tikimybės 112
21. Sąlyginė tikimybė 129
22. Kartojimo uždaviniai 136

V Plokštumos geometrija
23. Kaip prasideda geometrija 142
24. Trikampiai ir tiesės 151
25. Daugiakampiai 177
26. Apskritimas ir skritulys 188

Kartojimo uždavinių atsakymai 201

III Funkcijos (tęsinys)

15. Trigonometrinės funkcijos
15.1. Kampų matavimas laipsniais ir radianais 8
15.2. Posūkių kampai 12
15.3. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimai 15
15.4. Trigonometrinių funkcijų savybės 18
15.5. Redukcijos formulės 21
15.6. Funkcija $f(x) = \sin x$ 25
15.7. Funkcija $f(x) = \cos x$ 34
15.8. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ 41
15.9. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ 48
15.10. Trigonometrinės formulės 53
15.11. Dar daugiau trigonometrinių formulių 59

16. Kartojimo uždaviniai 63

17. Skaičių sekos
17.1. Skaičių sekos ir jų reiškimo būdai 69
17.2. Didėjančios ir mažėjančios skaičių sekos 73
17.3. Aritmetinė progresija 76
17.4. Geometrinė progresija 83
17.5. Nykstamoji geometrinė progresija 89

18. Kartojimo uždaviniai 94



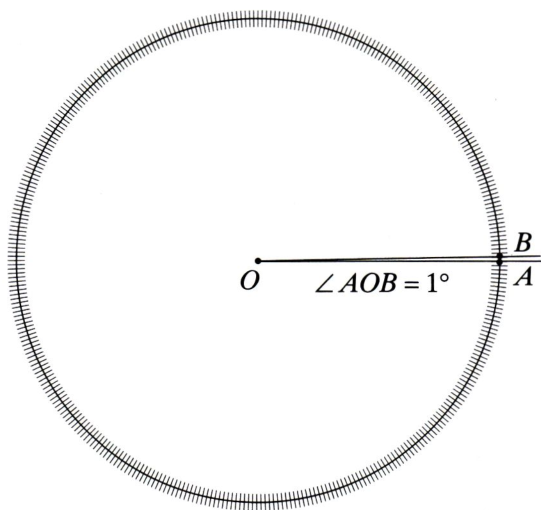
15. Trigonometrinės funkcijos

15.1. Kampų matavimas laipsniais ir radianais

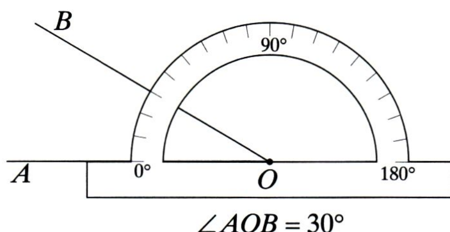
Išmatuoti dydį reiškia surasti jo santykį su matavimo vienetu ir išreikšti šį santykį skaičiumi. Pasirinkę skirtingus matavimo vienetus gausime skirtingus skaičius. Pavyzdžiui, apie 1 metro atstumą taip pat teisinga sakyti, kad jis lygus 100 centimetrų, 10 decimetrų, o taip pat — 39,37 colio, 3,2808 pėdos (anglų ilgio matai 1 colis = 2,54 cm, 1 pėda = 30,48 cm) ir t. t.

Kampas geometrijoje — plokštumos dalis, kurią riboja du iš vieno taško išeinantys spinduliai. Kampams matuoti dažniausiai vartojamas matavimo vienetas, kurį prieš kelis tūkstančius metų parinko šumerai — laipsnis.

Vieno laipsnio kampą gausime nubrėžę apskritimą, padaliję jo lanką į 360 lygių dalių ir iš apskritimo centro per vienos dalies galo taškus nubrėžę spindulius.

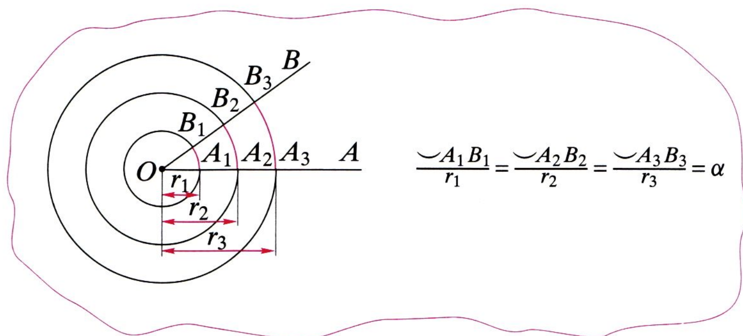


Kampą ir jo didumą žymėsime tais pačiais simboliais, pavyzdžiui, $\angle AOB = 30°$ reiškia, kad kampą AOB sudaro lygiai 30 matavimo vienetų — laipsnių.



Matematikoje dažnai patogu vietoj laipsnio vartoti kitą kampų matavimo vienetą — radianą.

Nubrėžkime kelis apskritimus, kurių centrai yra to paties kampo AOB viršūnėje (koncentrinius apskritimus).

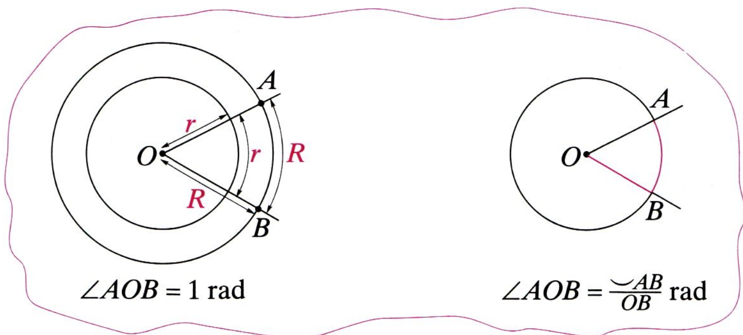


Lankų, kuriuos apskritimuose išpjauna kampo spinduliai, ilgių ir atitinkamų apskritimų spindulių ilgių santykiai yra lygūs tam pačiam skaičiui α.

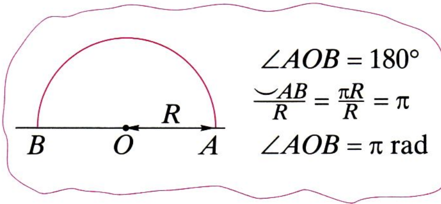
Jei $\alpha = 1$, tai kampo spinduliai kiekviename apskritime išpjauna lanką, kurio ilgis lygus to apskritimo spinduliui. Tada sakoma, kad kampo didumas lygus 1 radianui, žymima 1 rad.

Centrinio kampo, atitinkančio apskritimo lanką, kurio ilgis lygus apskritimo spinduliui, didumas lygus 1 *radianui.*

Radianas yra naujas kampų matavimo vienetas. Norint sužinoti kampo didumą radianais, galima nubrėžti apskritimą su centru kampo viršūnėje, išmatuoti lanko tarp kampo kraštinių ilgį ir surasti šio ilgio santykį su apskritimo spindulio ilgiu. Gautasis skaičius išreiškia kampo didumą radianais. Pavyzdžiui, jei lanko tarp kampo kraštinių ilgis lygus pusei spindulio ilgio, tai to kampo didumas lygus pusei radiano.



Nustatysime ryšį tarp dviejų kampo matavimo vienetų — laipsnio ir radiano. Panagrinėkime kampą, kurio didumas lygus 180°.



Kampo AOB spinduliai OA ir OB yra vienoje tiesėje, dalijančioje apskritimą su centru kampo viršūnėje pusiau, taigi $\smile AB = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R$, $\angle AOB = \frac{\smile AB}{R}$ rad $=$ $= \pi$ rad. Kadangi $\angle AOB = 180°$, tai teisinga lygybė

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

Iš čia

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Tarkime, kad l yra kampo didumas laipsniais. Norėdami sužinoti, koks šio kampo didumas radianais, l dalijame iš vieną radianą atitinkančių laipsnių skaičiaus. Taigi to paties kampo didumas radianais yra

$$\frac{l}{\frac{180}{\pi}} = \frac{\pi l}{180}.$$

Jei l yra kampo didumas laipsniais, o α — to paties kampo didumas radianais, tai

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi l}{180}, \quad l = \frac{180}{\pi}\alpha}$$

Dažnai užrašant kampo didumą radianais užrašomas tik skaičius. Pavyzdžiui, jei užrašyta $\angle OAB = \frac{3}{2}$, tai reiškia, kad nurodyto kampo didumas lygus $\frac{3}{2}$ radiano.

Šitaip kampų didumus žymėsime ir mes: rašydami kampo didumą radianais rašysime tik skaičių, o kampo didumui laipsniais žymėti vartosime laipsnio simbolį.

Reiškiant kampų didumus radianais, supaprastėja kai kurios geometrijos formulės. Pavyzdžiui, skritulio, kurio spindulys lygus R, plotas skaičiuojamas taip: $S_{\text{skr}} = \pi R^2$, pusės skritulio — $\frac{1}{2}S_{\text{skr}} = \frac{\pi R^2}{2}$. Pusę skritulio atitinka centrinis kampas, kurio didumas radianais lygus π. Todėl 1 radiano centrinį kampą atitinka skritulio išpjova, kurios plotas lygus

$$\frac{\frac{1}{2}S_{\text{skr}}}{\pi} = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{R^2}{2}.$$

Jeigu skritulio išpjovą atitinka t radianų centrinis kampas, tai skritulio išpjovos plotas S skaičiuojamas taip:

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot t.$$

Užduotis. Įrodykite, kad centrinis t radianų kampas iš apskritimo išpjauna $l = tR$ ilgio lanką; čia R yra apskritimo spindulys.

Pratimai ir uždaviniai

1. Išreikškite radianais: 36°; 60°; 135°; 360°; 240°; 3960°.

2. Išreikškite laipsniais: $\frac{1}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; 1; 2; 7π.

3. Tegu r — apskritimo spindulio ilgis, α — centrinio kampo didumas, l — tą centrinį kampą atitinkančio apskritimo lanko ilgis, S — centrinį kampą α atitinkančio skritulio išpjovos plotas. Užbaikite pildyti lentelę:

r	6 dm	6 dm	10 cm	10 cm	0,2 m	0,2 m
α	30°	$\frac{\pi}{6}$	120°	$\frac{2}{3}\pi$	270°	$\frac{3}{2}\pi$
l						
S						

4. Raskite trikampio kampų didumus radianais, kai:
a) trikampio kampų didumų santykis yra 3 : 2 : 4;
b) trikampis yra statusis ir lygiašonis.

5. Raskite keturkampio kampų didumus laipsniais ir radianais, kai tų kampų didumų santykis yra:
a) 5 : 7 : 9 : 15; b) 6 : 8 : 9 : 13.

6. Apskritimo lankas sudaro $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{6}$; 0,1; 0,275; 0,8 apskritimo. Raskite tą lanką atitinkančio centrinio kampo didumą radianais.

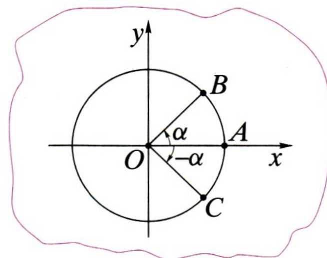
Radianas — matematikų sugalvotas kampų matavimo vienetas. Praktiniais dalykais užsiėmusiems žmonėms pasiūlymas ištiestinį kampą matuoti iracionaliuoju skaičiumi atrodytų labai keistas.
Žodį „radianas“ 1873 metais pradėjo vartoti Dž. Tomsonas, įžymiojo fiziko Kelvino brolis.

15.2. Posūkių kampai

Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą su centru O ir pažymėkime jo susikirtimo su Ox ašimi tašką A.

Įsivaizduokime, kad apskritimo spindulį OA (arba visą begalinį spindulį su pradžios tašku O) galime sukioti apie tašką O. Spindulį galime sukti dviem kryptimis. Jeigu sukame prieš laikrodžio rodyklę, sakome, kad sukame teigiamąja kryptimi, jeigu pagal laikrodžio rodyklę — neigiamąja kryptimi.

Tarkime, pasukus teigiamąja kryptimi, spindulys OA sutapo su OB, neigiamąja — su OC ir $\angle AOB = \angle AOC$. Tegu $\frac{\smile AB}{R} = \frac{\smile AC}{R} = \alpha$ $(R = OA)$.



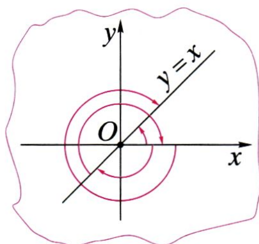
Sakysime, kad pirmuoju atveju pasukome spindulį kampu, kurio didumas lygus α radianų, o antruoju atveju — kampu, kurio didumas lygus $-\alpha$ radianų. Arba trumpiau: pirmasis posūkio kampas lygus α, o antrasis lygus $-\alpha$.

Taigi posūkių kampus galima matuoti radianais. Tam reikia surasti lanko, kurį prabėga apskritimo spindulio galo taškas, ilgį, padalyti jį iš apskritimo spindulio ilgio ir pasirinkti pliuso arba minuso ženklą priklausomai nuo to, teigiamąja ar neigiamąja kryptimi spindulį sukome.

Žinoma, posūkio kampo didumą galima išreikšti ir laipsniais. Posūkio kampo didumą laipsniais l ir radianais α sieja ankstesniame skyrelyje pateiktos formulės:

$$\alpha = \frac{\pi}{180} l, \qquad l = \frac{180}{\pi} \alpha.$$

1 užduotis. Suraskite brėžinyje pavaizduotų keturių posūkio kampų didumą laipsniais ir radianais.



Kiekvieną posūkio kampą atitinka skaičius, reiškiantis posūkio kampo didumą radianais. Kita vertus, kad ir koks būtų skaičius α, visada galima spindulį OA pasukti taip, kad posūkio kampo didumas būtų lygus α radianų.

Jeigu spindulį OA apie tašką O pasuksime

$$\frac{\pi}{2}, \qquad 2\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad 3\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{arba} \quad 4\cdot\frac{\pi}{2}$$

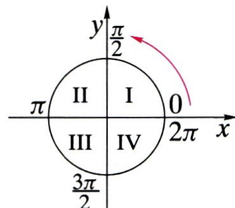
radianų kampu, tai spindulys OA atsidurs vienoje iš koordinačių ašių. Apskritai OA atsidurs vienoje iš koordinačių ašių pasukus jį bet kokiu

$$\alpha = n\cdot\frac{\pi}{2}, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$

kampu. Tačiau jeigu posūkio kampo didumas α nelygus nei vienam iš skaičių $n\cdot\frac{\pi}{2}$ ($n \in \boldsymbol{Z}$), tai spindulys OA atsidurs viename iš koordinačių sistemos ketvirčių. Jeigu OA yra pirmajame ketvirtyje, tai α vadiname pirmojo ketvirčio kampu, jeigu antrajame, trečiajame ar ketvirtajame — atitinkamai antrojo, trečiojo ar ketvirtojo ketvirčio kampu.

Nesunku įsitikinti, kad:

1) jei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tai α yra I ketvirčio kampas,
2) jei $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, tai α yra II ketvirčio kampas,
3) jei $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, tai α yra III ketvirčio kampas,
4) jei $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, tai α yra IV ketvirčio kampas.



Tarkime, kad, pasukus spindulį OA kampu α, jis sutapo su spinduliu OB. Jeigu spindulį pasukę kampu α jį dar pasuktume kampu 2π arba -2π (apskritai — kampu $2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$), tai OA vėl sutaptų su OB. Taigi, pavyzdžiui, ne tik kampai α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, bet ir visi kampai $\alpha + 2n\pi$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$) yra pirmojo ketvirčio kampai. Analogiškai visi kampai $\alpha + 2n\pi$, kur $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ir $n \in \boldsymbol{Z}$, yra antrojo ketvirčio kampai.

2 užduotis. Užrašykite, koks turi būti posūkio kampo didumas laipsniais, kad tas kampas būtų pirmojo (antrojo, trečiojo, ketvirtojo) ketvirčio kampas.

Pratimai ir uždaviniai

7. Pažymėkite galutinę apskritimo spindulio OA padėtį, kai posūkio kampas α:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; b) $\alpha = 60° + 360°n$;

c) $\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n$; d) $\alpha = -120° + 360°n$ ($n \in \boldsymbol{Z}$).

8. Apskaičiuokite:

a) $180° - 29°47' + 45°12' - 55°49'$;
b) $180° + 35°43' - 27°17' + 49°29'$.

Nurodymas. $1'$ reiškia kampą, lygų $(\frac{1}{60})°$. Sakoma, kad tokio kampo didumas — viena minutė.

---

9. Apskaičiuokite didumą laipsniais to posūkio kampo, kuriuo valandinė rodyklė pasisuka per: 3 val, $4\frac{1}{2}$ val, $2\frac{3}{4}$ val, $19\frac{1}{3}$ val, $\frac{2}{5}$ val, $\frac{1}{12}$ val.

10. Raskite valandinės, minutinės ir sekundinės laikrodžio rodyklių kampinį greitį radianais per minutę.

11. Kokio didumo kampais pasisuks laikrodžio minutinė ir valandinė rodyklės:

a) nuo 13 val 15 min iki 14 val 15 min;

b) nuo 4 val 10 min iki 6 val 40 min;

c) nuo 1 val 05 min iki 13 val 05 min;

d) nuo 2 val 30 min iki 3 val 45 min;

e) nuo 10 val 25 min iki 16 val 35 min?

12. Kuriam ketvirčiui priklauso posūkio kampas α, kai jis lygus:

a) $185°$; $400°$; $-290°$; $500°$; $-700°$; $2000°$;

b) $\frac{\pi}{7}$; $\frac{2\pi}{7}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $1{,}8\pi$; $-1{,}8\pi$; $2{,}1\pi$; $100{,}2\pi$?

13. Pasukus vienetinio apskritimo spindulį OA kampu $-30°$, taškas A atsidūrė taške B. Kuriuo iš nurodytų kampų pasukus spindulį OA, taškas A taip pat atsidurtų taške B? Pasirinkite teisingą atsakymą.

A $-\frac{5\pi}{6}$ **B** $-730°$ **C** $-\frac{35\pi}{6}$ **D** $750°$

14. Skritulio spindulys lygus 27 mm. Raskite skritulio išpjovos perimetrą, jeigu atitinkamas centrinis kampas lygus $\frac{4}{9}$ radiano.

15. Raskite išpjovos spindulį, jei jos plotas $288\,dm^2$, o lanką ribojantis centrinis kampas lygus $\frac{4}{9}$ radiano.

16. Raskite išpjovos lanko didumą radianais, kai jos plotas lygus $96\,cm^2$, o spindulys 8 cm.

17. Raskite išpjovos centrinį kampą laipsniais, kai jos spindulys R, o plotas S:

a) $R = 15$ dm, $S = 81\pi\ dm^2$;

b) $R = 6$ m, $S = 1600\pi\ cm^2$.

18. Kompaso apskritimas padalytas į 32 lygias dalis, vadinamas rumbais. Išreikškite centrinio kampo, atitinkančio vieną rumbą, didumą laipsniais ir radianais.

19. a) Ratas sukasi $\frac{\pi}{6}$ rad/s kampiniu greičiu. Kokiu kampu jis pasisuks per 30 s, per 1 min, per 1 val?

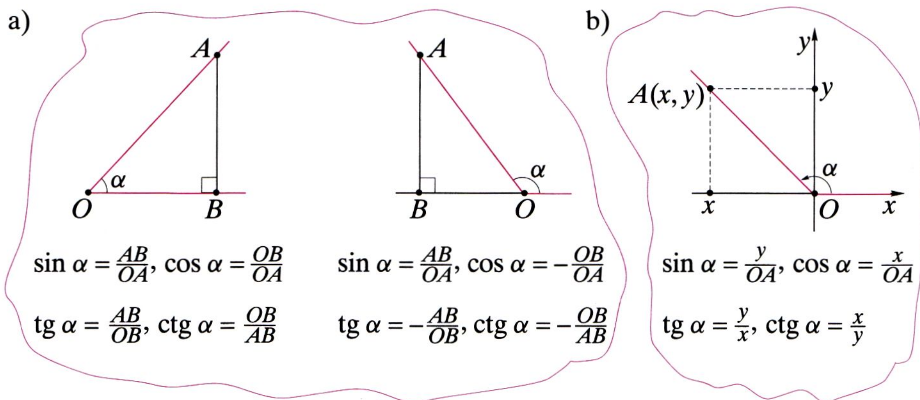
b) Ratas sukasi 4π rad/s kampiniu greičiu. Kokiu kampu jis pasisuka per 10 s, per 1 min 20 s, per 3 min 50 s, per 2 val?

20. Taškas juda 50 cm spindulio apskritimu 720 m/min greičiu. Išreikškite jo kampinį greitį radianais per sekundę.

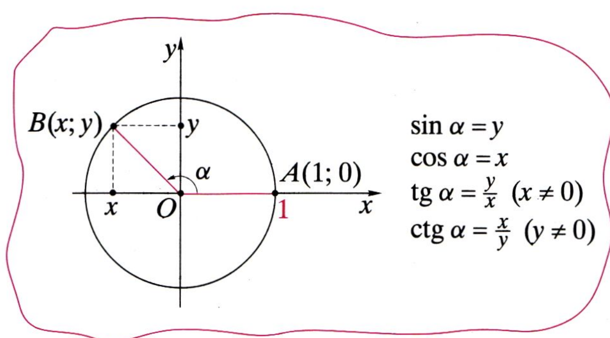
21. Apsisukus krumpliaračiui vieną kartą, kitas krumpliaratis apsisuka du kartus priešinga kryptimi. Kokiu kampu pasisuks antras krumpliaratis, kai pirmasis pasisuks: $200°$, $360°$, $600°$, $900°$, $3600°$ kampu?

15.3. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimai

Geometrijoje dažniausiai nagrinėjame kampus, kurių didumai radianais α tenkina nelygybę $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, o didumai laipsniais — $0^\circ \leqslant l \leqslant 180^\circ$. Tokių kampų sinusus, kosinusus, tangentus ir kotangentus atskirai smailiesiems ir bukiesiems kampams apibrėžiame pasinaudoję stačiaisiais trikampiais, žr. a) brėžinį. Jeigu kampą atidėsime koordinačių plokštumoje taip, kad vienas jo spindulys sutaptų su Ox ašimi, smailiųjų ir bukųjų kampų trigonometrines funkcijas galėsime apibrėžti naudodamiesi koordinatėmis, žr. b) brėžinį.



Apibrėšime posūkio kampų sinusus, kosinusus, tangentus ir kotangentus. Posūkio kampų didumai gali būti bet kokie skaičiai. Koordinačių plokštumoje nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys lygus vienetui, o centras — koordinačių pradžios taškas, ir pažymėkime tašką $A(1; 0)$.



Posūkio kampo α sinusu vadiname taško, į kurį pereina taškas $A(1; 0)$, pasukus spindulį OA kampu α, ordinatę y; kosinusu — abscisę x; tangentu — santykį $\frac{y}{x}$ (kai $x \neq 0$), kotangentu — santykį $\frac{x}{y}$ (kai $y \neq 0$).

Žymime: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Iš apibrėžimo matome, kad $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$ apibrėžti su visais α ir įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$. Kai $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha$ nėra apibrėžtas; kai $y = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha$ nėra apibrėžtas. Kai $x \neq 0$ ir $y \neq 0$ tiesiog iš apibrėžimų gauname šiuos sąryšius:

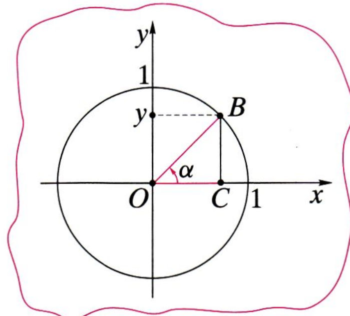
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Tegu $B(x; y)$ yra taškas, į kurį pereina taškas $A(1; 0)$, pasukus spindulį OA kampu α. Kadangi spindulio OB ilgis lygus 1, tai $1^2 = x^2 + y^2$, arba $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Taigi kampo α trigonometrines funkcijas sieja šios lygybės:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\sin\alpha \neq 0)$$

Kai $0 < \alpha < \pi$, trigonometrinių funkcijų reikšmės, apibrėžtos naudojantis stačiaisiais trikampiais ir vienetiniu apskritimu, yra tos pačios.

Iš tikrųjų, iš stačiojo trikampio OBC ($\angle C = 90^\circ$) kampo α sinusą apibrėžtume santykiu: $\sin\alpha = \frac{BC}{OB}$, tačiau $OB = 1$, $BC = y$, taigi $\sin\alpha = y$. Panašiai galime išnagrinėti ir kitus atvejus.



Kiekvienam skaičiui x galime nurodyti vienintelį posūkio kampą, kurio didumas lygus x radianų. Sakysime, kad šio kampo sinusas (kosinusas, tangentas, kotangentas) yra tiesiog skaičiaus x sinusas (kosinusas, tangentas, kotangentas). Taigi apibrėžėme kintamojo x funkcijas, kurias žymėsime $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$. Funkcijos $\sin x, \cos x$ apibrėžtos su visomis x reikšmėmis, funkcija $\operatorname{tg} x$ neapibrėžta tada, kai $x = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, -\frac{\pi}{2} - \pi, \ldots$; apskritai — kai $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, čia n yra bet koks sveikasis skaičius. Funkcija $\operatorname{ctg} x$ neapibrėžta, kai $x = n\pi$.

Dažnai prisireikia trigonometrinių funkcijų reikšmių, kai $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ (atitinkamų kampų didumai laipsniais yra $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$). Įsiminti sinusų ir kosinusų reikšmes gali padėti tokia lentelė:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x =$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos x =$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Tangento ir kotangento reikšmes galime apskaičiuoti remdamiesi sąryšiais

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Surašykime trigonometrinių funkcijų reikšmes, kai $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, į lentelę:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} x =$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pratimai ir uždaviniai

22. Nubraižykite kampus, kurių:

a) sinusai lygūs: $\frac{1}{2}$; 0,4; 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) kosinusai lygūs: 0; 0,5; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) tangentai lygūs: $\frac{1}{3}$; 1; 0,6; $\sqrt{3}$;

d) kotangentai lygūs: 0,5; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 1; 4.

23. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $3\sin 60^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ$;

b) $2\sin 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$;

c) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

d) $5\cos\frac{\pi}{3} + 7\sin\frac{\pi}{6}$.

24. Nurodykite keletą α reikšmių, su kuriomis:
a) $\sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$;
b) $\sin\alpha = -1$; $\cos\alpha = -1$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

25. Raskite reiškinio reikšmę:
a) $\sin(2\alpha) + \cos(3\alpha)$, kai $\alpha = 15^\circ$; 30°; 90°;
b) $\cos\alpha + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha)$, kai $\alpha = 30^\circ$; 60°;
c) $\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{ctg}(3\alpha)$, kai $\alpha = 15^\circ$; 30°;
d) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{3}$, kai $\alpha = 60^\circ$; 90°; 180°.

26. Nubrėžkite apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžioje. Pavaizduokite posūkio kampus α, kai $\alpha = 70^\circ$; 150°; -120°. Raskite apytiksles $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$ reikšmes.

27. Raskite kampo α, kurį sudaro vektorius $\overrightarrow{OA}$ su koordinačių ašimi Ox, trigonometrinių funkcijų reikšmes, jeigu taško A koordinatės yra:
a) $(1; 1)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$; $(-1; -1)$;
b) $(1; \sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}; 1)$; $(-\sqrt{3}; -1)$; $(1; -\sqrt{3})$;
c) $(1; 0)$; $(0; 1)$; $(-1; 0)$; $(0; -1)$;
d) $(2; 3)$; $(3; 1)$; $(-4; 1)$; $(-1; -5)$.

15.4. Trigonometrinių funkcijų savybės

Jeigu pasuksime vienetinio apskritimo spindulį OA kampu x ir kampu $x + 2\pi$ (arba kampu $x - 2\pi$), galutinė spindulio padėtis bus ta pati, todėl:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x \pm 2\pi) = \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{ctg}(x \pm 2\pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmės nepasikeičia padidinus ar sumažinus argumento reikšmę skaičiumi 2π, o taip pat — 4π, 6π, 8π; apskritai — bet kuriuo skaičiumi $n \cdot 2\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Taigi trigonometrinių funkcijų reikšmės periodiškai kartojasi.

APIBRĖŽIMAS
Funkcija $f(x)$ vadinama periodine, jei yra toks skaičius $T \neq 0$, kad su visais x iš funkcijos apibrėžimo srities $x \pm T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir $f(x \pm T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos $f(x)$ periodu.

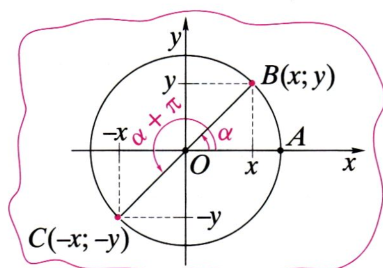
Jeigu skaičius T yra funkcijos $f(x)$ periodas, tai skaičiai $2T, 3T$ (apskritai — nT, kur $n \in \boldsymbol{Z}$) yra funkcijos $f(x)$ periodai. Iš tikrųjų, pavyzdžiui,

$$f(x \pm 2T) = f\big((x \pm T) \pm T\big) = f(x \pm T) = f(x).$$

Todėl svarbu nustatyti periodinės funkcijos mažiausią teigiamą periodą.

Funkcijos $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ yra periodinės, $T = 2\pi$ yra visų jų periodas. Funkcijoms $\sin x, \cos x$ tai mažiausias teigiamas periodas, o funkcijos $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ turi dar mažesnį teigiamą periodą.

Panagrinėkime spindulio OA posūkius kampu α ir $\alpha + \pi$. Tegu pirmuoju atveju taškas A pereina į tašką $B(x; y)$; antruoju atveju — į tašką C. Panagrinėję brėžinį įsitikinsime, kad taško C koordinatės yra $(-x; -y)$.



Taigi

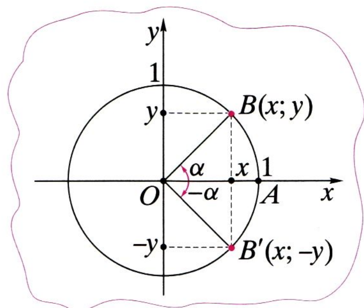
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$,

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$, $\qquad$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$; $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$.

Įsitikinome, kad funkcijos $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ yra periodinės su periodu $T = \pi$. Tai yra jų mažiausias teigiamas periodas.

Kaip pasikeičia trigonometrinių funkcijų reikšmės, kai pakeičiame argumento ženklą? Jei pasukus spindulį OA kampu α, taškas A pereina į tašką B su koordinatėmis x, y, t. y. į tašką $B(x; y)$, tai pasukus kampu $-\alpha$ taškas A pereis į tašką B', simetrišką taškui B tiesės Ox atžvilgiu.



Tada taško B' koordinatės yra $(x; -y)$. Taigi $\sin\alpha = y$, $\sin(-\alpha) = -y$, $\cos\alpha = x$, $\cos(-\alpha) = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\frac{x}{y}$, arba

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Iš keturių funkcijų: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, tik funkcija $y = \cos x$ yra lyginė, visos kitos — nelyginės.

Funkcijos $\sin x$, $\cos x$ *yra periodinės su mažiausiu teigiamu periodu* 2π.
Funkcijos $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *yra periodinės su mažiausiu teigiamu periodu* π.
Funkcija $\cos x$ *yra lyginė, funkcijos* $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *— nelyginės.*

Pratimai ir uždaviniai

28. Ar funkcija $f(x)$ yra periodinė:

a) $f(x) = x$;
b) $f(x) = x^2$;
c) $f(x) = 1$;
d) $f(x) = \frac{1}{x}$;
e) $f(x) = \sin x$;
f) $f(x) = \operatorname{ctg} x$;
g) $f(x) = \cos 3x$;
h) $f(x) = 2\operatorname{tg} x$;
i) $f(x) = 3\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x\right)$;
j) $f(x) = x\sin x$?

29. Raskite funkcijos mažiausią teigiamą periodą:

a) $\sin(2x)$; b) $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$; c) $\mathrm{tg}(3x)$;

d) $\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{5}x\right)$; e) $\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$; f) $\mathrm{tg}(10x)$.

30. Naudodamiesi trigonometrinių funkcijų periodiškumu funkcijų reikšmes pakeiskite mažesnio teigiamo kampo trigonometrinių funkcijų reikšmėmis:

a) $\sin 415°$; b) $\cos 384°$; c) $\mathrm{tg}\, 520°$;

d) $\mathrm{ctg}\, 485°$; e) $\sin\left(\frac{17}{2}\pi\right)$; f) $\cos\left(8\frac{7}{9}\pi\right)$;

g) $\mathrm{tg}\left(\frac{115}{3}\pi\right)$; h) $\mathrm{ctg}\left(\frac{27}{4}\pi\right)$; i) $\sin(252{,}2\pi)$.

31. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra lyginė, o $g(x)$ — nelyginė:

a) $f(x) = x\sin x, \quad g(x) = x\cos x$;

b) $f(x) = x^2\cos x, \quad g(x) = \frac{\sin x\,\mathrm{tg}\,x}{x}$;

c) $f(x) = \frac{x^3\sin x}{\mathrm{tg}^2 x}, \quad g(x) = |x|\cdot\sin^3 x$;

d) $f(x) = \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2} - \mathrm{tg}^2 x, \quad g(x) = x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

32. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra nei lyginė, nei nelyginė:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$; b) $f(x) = x^2 + \sin x$;

c) $f(x) = \frac{x\cdot\mathrm{tg}\,x}{x-1}$; d) $f(x) = 2 - \cos x$.

33. Suprastinkite reiškinį:

a) $\sin(180° + \alpha) - \cos(90° - \alpha) + \mathrm{tg}(270° - \alpha) - \mathrm{ctg}(360° - \alpha)$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(3\pi + \alpha) + \mathrm{tg}(\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)$;

c) $\sin^2(180° + \alpha) - \cos^2(270° + \alpha) - \mathrm{tg}(90° - \alpha)\cdot\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$;

d) $\cos^2(360° + \alpha) - 2\sin(180° + \alpha) + \mathrm{tg}^2(360° - \alpha)\cdot\sin^2(270° - \alpha)$.

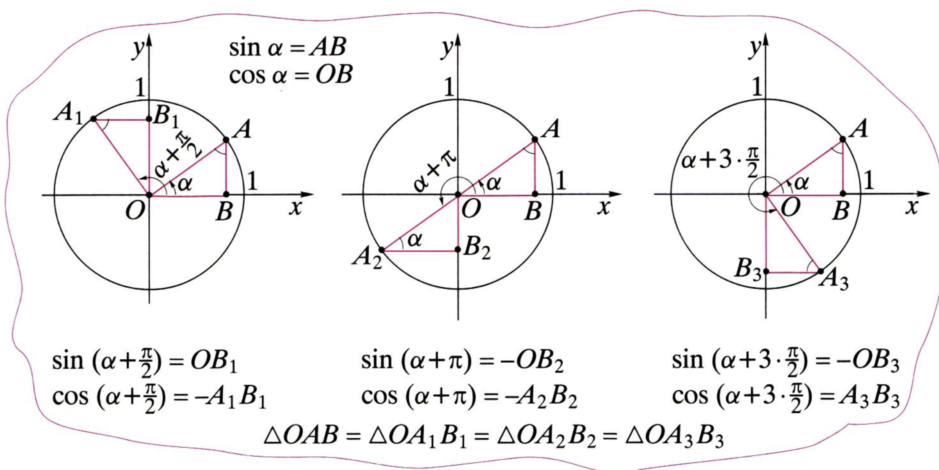
Žodis „trigonometrija“ sudarytas suliejus du graikų kalbos žodžius: „trikampis“ ir „matavimas“. Taigi trigonometrija atsirado iš žinių apie trikampių matavimą. Pirmiausia trigonometrijos prisireikė ne matematikams, bet astronomams, kuriems rūpėjo ne patys trikampiai, bet atstumai tarp dangaus kūnų ir jų tarpusavio padėtys.

15.5. Redukcijos formulės

Trigonometrinės funkcijos yra periodinės. Mažiausias teigiamas funkcijų $\sin x, \cos x$ periodas lygus 2π, funkcijų $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ lygus π. Todėl kiekvieno kampo sinusas (kosinusas) lygus atitinkamo kampo $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 360^\circ$) sinusui (kosinusui), tangentas (kotangentas) — kampo $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$) tangentui (kotangentui). Pavyzdžiui, $\sin 572^\circ = \sin(360^\circ + 212^\circ) = \sin 212^\circ$, $\operatorname{tg} 195^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 15^\circ) = \operatorname{tg} 15^\circ$.

Šiame skyrelyje įsitikinsime, kad bet kurio kampo trigonometrinės funkcijos gali būti išreikštos pirmojo ketvirčio kampų $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ trigonometrinėmis funkcijomis.

Jei α yra pirmojo ketvirčio kampas, tai $\frac{\pi}{2} + \alpha, \pi + \alpha, \frac{3\pi}{2} + \alpha$ yra atitinkamai antrojo, trečiojo ir ketvirtojo ketvirčių kampai. Panagrinėkime šiuos kampus, kai $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.



Iš brėžinių matome, kad

$$\sin\alpha = AB, \qquad \cos\alpha = OB,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = OB_1, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -OB_2, \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -OB_3.$$

Tačiau $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1 = \triangle OA_2B_2 = \triangle OA_3B_3$. Panagrinėję šiuos lygius trikampius įsitikinsime, kad $OB_1 = OB$, $OB_2 = AB$, $OB_3 = OB$. Taigi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

1 užduotis. Įsitikinkite, kad

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Formules tangentui ir kotangentui galime išvesti naudodamiesi tuo, kad kiekvienam kampui β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Pavyzdžiui,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Gautos formulės vadinamos redukcijos formulėmis. Redukcijos formules galime užrašyti ir kampams, kurių didumai išreikšti laipsniais. Pavyzdžiui, $\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$, $\sin(270^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$. Naudodamiesi redukcijos formulėmis galime bet kurio kampo trigonometrines funkcijas išreikšti pirmojo ketvirčio kampų trigonometrinėmis funkcijomis.

1 PAVYZDYS. Išreikškime $\sin 930^\circ$, $\cos(\frac{172}{3}\pi)$ pirmojo ketvirčio kampų trigonometrinėmis funkcijomis.

Pirmiausia išskirkime trigonometrinių funkcijų periodą. Padaliję 930 iš 360 su liekana gauname: $930^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 210^\circ$. Taigi

$$\sin 930^\circ = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ.$$

Išskirti periodą 2π iš $\frac{172}{3}\pi$ galima taip. Padaliję 172 iš 3 su liekana gauname: $172 = 3\cdot 57+1$. Taigi

$$\frac{172}{3}\pi = \frac{3\cdot 57+1}{3}\cdot\pi = 57\pi+\frac{1}{3}\pi = 56\pi+\left(\pi+\frac{1}{3}\pi\right) = 28\cdot(2\pi)+\left(\pi+\frac{1}{3}\pi\right).$$

Todėl $\cos(\frac{172}{3}\pi) = \cos(\pi+\frac{1}{3}\pi) = -\cos\frac{\pi}{3}$.

Nors išvesdami redukcijos formules naudojomės brėžiniais, kuriuose α yra pirmojo ketvirčio kampas, jos teisingos su visomis α reikšmėmis, ir teigiamomis, ir neigiamomis. Pavyzdžiui, galime jomis naudotis taip:

$\sin 295^\circ = \sin(180^\circ+115^\circ) = -\sin 115^\circ$;

$\sin 265^\circ = \sin(270^\circ-5^\circ) = \sin(270^\circ+(-5^\circ)) = -\cos(-5^\circ) = -\cos 5^\circ$ ir t. t.

Pasinaudoję formule $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$ su $\alpha = -\beta$ gauname:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\beta)\right) = \cos(-\beta) = \cos\beta.$$

2 užduotis. Įrodykite redukcijos formules:

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta, \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right) = \operatorname{ctg}\beta, \qquad \operatorname{ctg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\beta\right) = \operatorname{tg}\beta.$$

Šias dažnai naudojamas redukcijos formules verta įsiminti:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg}\alpha.$$

O kitų redukcijos formulių įsiminti neverta. Geriau išmokti paprastą taisyklę, kuri nurodo, kaip teisingai užrašyti redukcijos formules.

Jei redukuojate kampo $n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ trigonometrinę funkciją ir n yra lyginis skaičius, funkcijos nekeiskite; jei nelyginis — sinusą keiskite kosinusu, kosinusą — sinusu, tangentą — kotangentu, kotangentą — tangentu.
Prieš naująją funkciją parašykite tą ženklą (pliuso arba minuso), kurį turi pradinė (redukuojamoji) funkcija tame ketvirtyje, į kurį patektų kampas $n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha$, jeigu būtų $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ši taisyklė tinka ir laipsniais išreikštiems kampams. Tik dydį $\frac{\pi}{2}$ reikia pakeisti į 90°.

2 PAVYZDYS. Parašykime kampo $\frac{7\pi}{2} - \alpha$ trigonometrinių funkcijų redukcijos formules.

Mūsų atveju $n = 7$ yra nelyginis skaičius, todėl funkcijas teks keisti. Kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, kampas $\frac{7\pi}{2} - \alpha$ yra trečiojo ketvirčio kampas (įsitikinkite), šiame ketvirtyje sinusas ir kosinusas neigiami, tangentas ir kotangentas teigiami. Taigi redukcijos formulės atrodys taip:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

3 užduotis. Parašykite kampo $5\pi - \alpha$ trigonometrinių funkcijų redukcijos formules.

3 PAVYZDYS. Raskime reiškinių $\sin(-570°)$ ir $\cos(33\frac{1}{3}\pi)$ reikšmes.

Naudodamiesi funkcijų savybėmis ir redukcijos formulėmis gauname:

$$\sin(-570°) = -\sin 570° = -\sin(360° + 210°) = -\sin 210° = -\sin(180° + 30°) = \\ = -(-\sin 30°) = \sin 30° = \tfrac{1}{2};$$

$$\cos(33\tfrac{1}{3}\pi) = \cos(32\pi + \pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \cos\left(16 \cdot 2\pi + (\pi + \tfrac{1}{3}\pi)\right) = \cos(\pi + \tfrac{1}{3}\pi) = \\ = -\cos\tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}.$$

Naudodamiesi redukcijos formulėmis ne tik skaičiuojame trigonometrinių funkcijų reikšmes, bet ir pertvarkome reiškinius.

4 PAVYZDYS. Pertvarkykime reiškinius: a) $\sin(\frac{47}{5}\pi + \beta)$; b) $\operatorname{tg}(513^\circ + \beta)$.

a) Išskirsime trigonometrinės funkcijos periodą:
$47 = 5 \cdot 9 + 2$, $\frac{47}{5}\pi + \beta = \frac{5\cdot 9+2}{5}\pi + \beta = 9\pi + \frac{2}{5}\pi + \beta = 4 \cdot (2\pi) + \pi + \frac{2}{5}\pi + \beta$.
Taigi $\sin(\frac{47}{5}\pi + \beta) = \sin(\pi + \frac{2}{5}\pi + \beta) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2}{5}\pi + \beta)$.
Pritaikę redukcijos formulę su $\alpha = \frac{2}{5}\pi + \beta$ gauname $\sin(\frac{47}{5}\pi + \beta) = -\sin(\frac{2}{5}\pi + \beta)$.

b) Kadangi $513^\circ = 2 \cdot 180^\circ + 153^\circ$, tai
$\operatorname{tg}(513^\circ + \beta) = \operatorname{tg}(153^\circ + \beta) = \operatorname{tg}(90^\circ + 63^\circ + \beta) = -\operatorname{ctg}(63^\circ + \beta)$.

Pratimai ir uždaviniai

34. Trigonometrinių funkcijų reikšmes išreikškite intervalo $(0; 45^\circ)$ arba $(0; \frac{\pi}{4})$ kampų trigonometrinių funkcijų reikšmėmis:
a) $\sin 320^\circ$; $\cos 820^\circ$; $\operatorname{tg} 930^\circ$; $\operatorname{ctg} 460^\circ$;
b) $-\sin(1{,}4\pi)$; $\cos(3{,}2\pi)$; $\operatorname{tg}(11{,}4\pi)$; $\operatorname{ctg}(22{,}9\pi)$.

35. Apskaičiuokite trigonometrinių funkcijų reikšmes ir užpildykite lentelę:

$\alpha =$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	210°	315°	-225°
$\sin\alpha =$						
$\cos\alpha =$						
$\operatorname{tg}\alpha =$						
$\operatorname{ctg}\alpha =$						

36. Suprastinkite reiškinį:
a) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$; b) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; c) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;
d) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$; e) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;
f) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

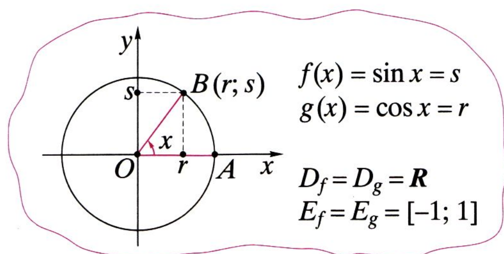
37. a) Naudodamiesi redukcijos formule $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ apskaičiuokite sandaugą $\operatorname{tg} 41^\circ \cdot \operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 49^\circ$.

b) Naudodamiesi redukcijos formule $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ apskaičiuokite sandaugą $\operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 85^\circ$.

38. Įrodykite tapatybę:
a) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)} = \sin\alpha$; b) $\frac{\sin(180^\circ+\alpha)}{\sin(270^\circ+\alpha)} + \frac{\cos(590^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)-1} = \frac{1}{\cos\alpha}$;
c) $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; d) $\sin(90^\circ + \alpha) - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2(270^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)}$;
e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; f) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

15.6. Funkcija $f(x) = \sin x$

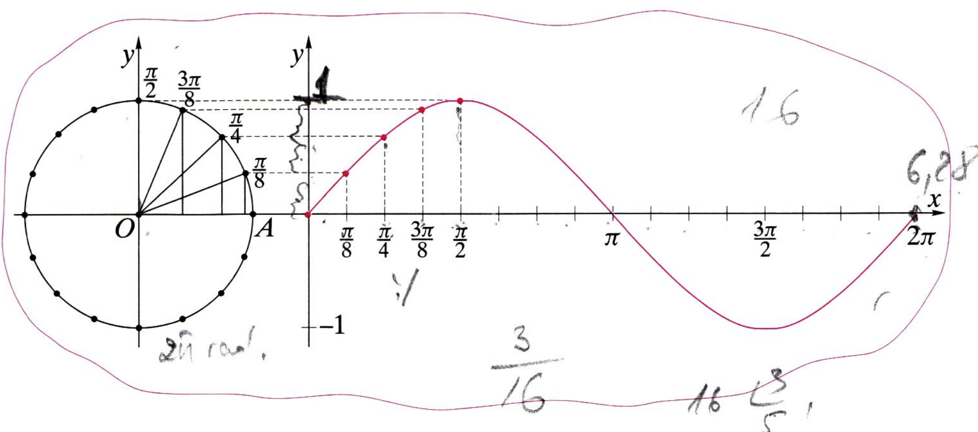
Prisiminkime, kaip apibrėžėme funkcijas $f(x) = \sin x$ ir $g(x) = \cos x$. Plokštumoje pasirinkime koordinačių sistemą. Nubrėžkime vienetinį apskritimą su centru koordinačių sistemos pradžios taške, pažymėkime apskritimo ir Ox ašies susikirtimo tašką A. Kiekvieną kintamojo x reikšmę atitinka posūkio kampas, kurio didumas radianais lygus x. Tegu spindulį OA pasukus x radianų kampu, taškas A pereina į tašką B su koordinatėmis $(r; s)$. Tada $\cos x = r$, $\sin x = s$. Šiomis lygybėmis visoje realiųjų skaičių aibėje apibrėžiame dvi funkcijas: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$. Nesunku įsitikinti, kad intervalas $[-1; 1]$ yra abiejų funkcijų reikšmių aibė.



Funkcijos $f(x) = \sin x$ grafikas

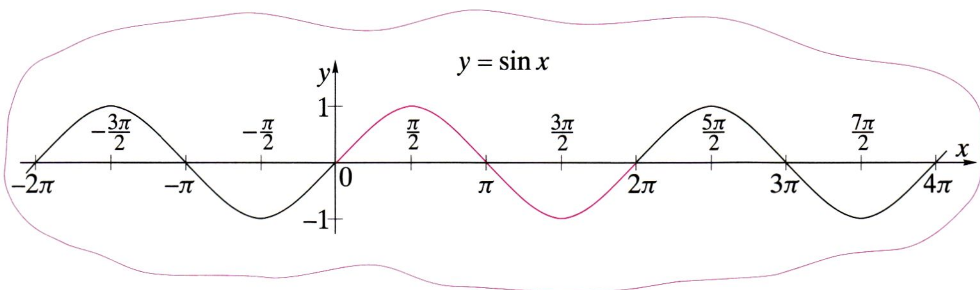
Funkcijos grafiką patogu braižyti pasirinkus vienoje plokštumoje dvi koordinačių sistemas. Pirmojoje koordinačių sistemoje nusibrėžkime vienetinį apskritimą. Kitoje sistemoje braižysime funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiką. Iš pradžių grafiką braižysime intervale $[0; 2\pi]$.

Padalykime vienetinį apskritimą ir antrosios koordinačių sistemos Ox ašies intervalą $[0; 2\pi]$ į tiek pat skaičių lygių dalių; brėžinyje jų yra 16.



Sujunkime apskritimo dalijimo taškus su centru spinduliais. Ašyje Ox atidėjome kintamojo x reikšmes, o ant apskritimo — taškus, į kuriuos pereitų taškas A, pasukus spindulį OA kampais, lygiais atidėtoms kintamojo x reikšmėms. Norint rasti funkcijos

$f(x) = \sin x$ grafiko tašką, kai, pavyzdžiui, $x = \frac{\pi}{8}$, pakanka per apskritimo dalijimo tašką, atitinkantį posūkį kampu $\frac{\pi}{8}$, nubrėžti tiesę, lygiagrečią Ox ašiai, ir pažymėti jos susikirtimo tašką su tiese $x = \frac{\pi}{8}$. Panašiai rasime kitus grafiko taškus, atitinkančius pažymėtąsias x reikšmes. Sujungę gautus taškus kreive gausime funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiką, kai $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Jeigu pasuktume spindulį OA kampu, didesniu už 2π, pavyzdžiui, kampu $2\pi + \alpha$, $\alpha > 0$, tai taškas A pereitų į tą patį tašką, į kurį jis pereina pasukus spindulį kampu α. Taigi kai $2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$, funkcijos $f(x) = \sin x$ grafikas atkartoja grafiko dalį su $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Apskritai bet kuriame intervale $2n\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi + 2\pi$ ($n \in \boldsymbol{Z}$) grafikas atrodo taip pat, kaip intervale $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.



Funkcijos $f(x) = \sin x$ grafikas yra „banguojanti“ kreivė, kurią vadinsime *sinusoide*. Iš grafiko nesunku nustatyti funkcijos $f(x) = \sin x$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Funkcija $f(x) = \sin x$ *apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo* $[-1; 1]$. *Ši funkcija yra nelyginė ir periodinė su mažiausiu teigiamu periodu* 2π. *Intervaluose* $[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$ *ji yra didėjanti, o intervaluose* $[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi]$ — *mažėjanti; čia n — bet koks sveikasis skaičius.*

1 užduotis. Nubraižykite grafikus funkcijų: $f(x) = \sin x + 1$, $f(x) = 2\sin x$, $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

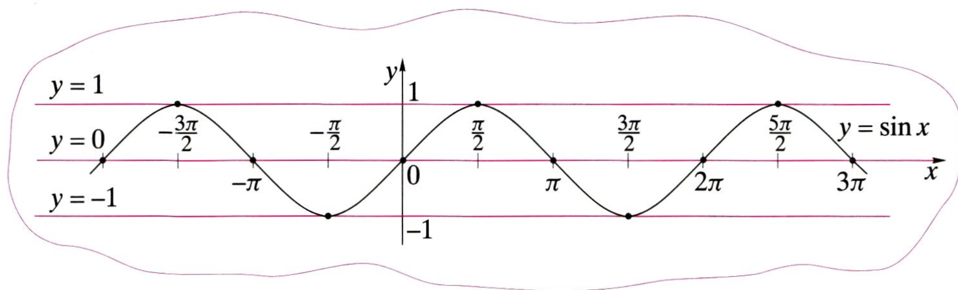
Lygtis $\sin x = a$

Dabar panagrinėsime, su kokiomis kintamojo x reikšmėmis funkcija $f(x) = \sin x$ įgyja iš anksto nurodytą reikšmę, t. y. panagrinėsime lygtį $\sin x = a$, čia x — nežinomasis, a — žinomas skaičius. Šios lygties sprendiniai — funkcijų $y = a$ ir $y = \sin x$ grafikų (tiesės ir sinusoidės) sankirtos taškų abscisės.

Kai $|a| > 1$, tiesė $y = a$ nekerta sinusoidės, todėl lygtis sprendinių neturi.
Kai $a = 1$, tiesė $y = 1$ ir sinusoidė turi be galo daug bendrų taškų; šių taškų abscisės yra: $x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 2 \cdot (2\pi), \ldots$, t. y.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Šios reikšmės ir yra visi lygties $\sin x = 1$ sprendiniai.



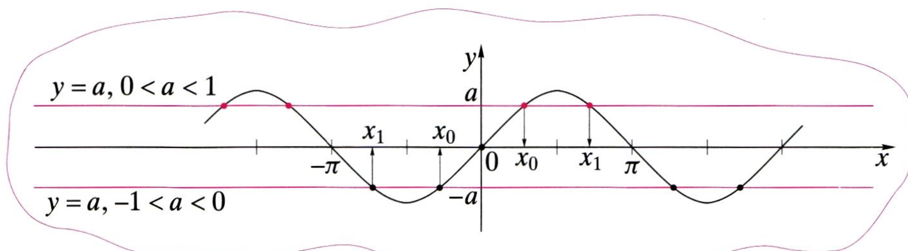
Kai $a = 0$, tiesė $y = 0$ ir sinusoidė $y = \sin x$ taip pat turi be galo daug bendrų taškų, jų abscisės $x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, yra lygties $\sin x = 0$ sprendiniai.

Lygtis $\sin x = -1$ taip pat turi be galo daug sprendinių: visi jie užrašomi formule $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Visi lygties $\sin x = 1$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Visi lygties $\sin x = -1$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Visi lygties $\sin x = 0$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

2 užduotis. Išspręskite lygtis $\sin(2x) = 1$, $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0$.

Dabar išnagrinėkime lygtį $\sin x = a$, kai $|a| < 1$, $a \neq 0$. Iš brėžinio matome, kad šios lygties sprendiniai išsidėstę skaičių tiesėje poromis.



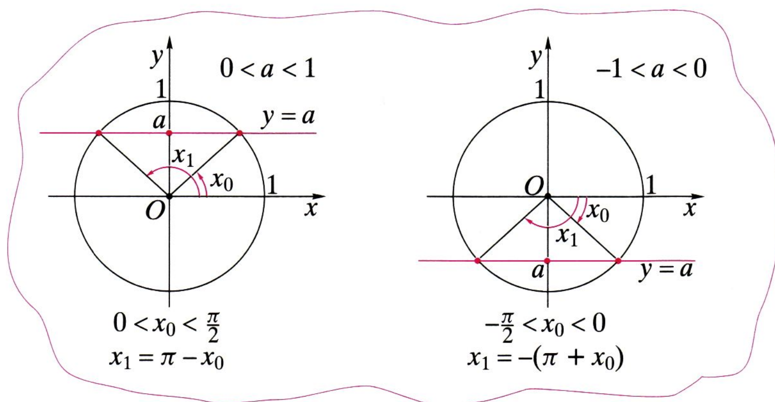
Pakanka surasti vieną sprendinių porą, pavyzdžiui, x_0 ir x_1, tada kitas gausime pridėję prie x_0 ir x_1 po $2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

Taigi visi lygties $\sin x = a$ ($|a| < 1$, $a \neq 0$) sprendiniai užrašomi lygybėmis

$$x = x_0 + 2k\pi, \qquad x = x_1 + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Kampus, kurių didumai lygūs x_0 ir x_1, nesunku atidėti geometriškai. Iš tikrųjų, jei $0 < a < 1$, tai pakanka surasti du kampus, kurių sinusai lygūs a, o didumai — intervalo $[0; \pi]$ skaičiai. Kai $-1 < a < 0$, ieškome kampų, kurių didumai priklausytų intervalui $[-\pi; 0]$.

Kad surastume šiuos kampus, koordinačių plokštumoje nubraižykime vienetinį apskritimą su centru koordinačių sistemos pradžioje ir tiesę $y = a$. Pažymėję šios tiesės ir apskritimo susikirtimo taškus sujunkime juos su apskritimo centru. Šitaip gausime du kampus, kurių sinusai lygūs a, o didumai x_0 ir x_1.



Iš brėžinio nesunku nustatyti taip pat ir sąryšį tarp x_0 ir x_1. Kai $0 < a < 1$, tai $x_1 = \pi - x_0$; kai $-1 < a < 0$, tai $x_1 = -(\pi + x_0)$.

Taigi lygties $\sin x = a$ sprendinius dabar galime užrašyti taip: jeigu $0 < a < 1$, tai sprendiniai yra

$$x = x_0 + 2k\pi, \qquad x = (\pi - x_0) + 2k\pi = -x_0 + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

jei $-1 < a < 0$, tai lygties sprendiniai yra

$$x = x_0 + 2k\pi, \qquad x = -(\pi + x_0) + 2k\pi = -x_0 + (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Lygties sprendiniams užrašyti patogu vietoj dviejų formulių naudotis viena, tinkančia ir neigiamoms, ir teigiamoms a ($|a| < 1$) reikšmėms.

Visi lygties $\sin x = a$, kai $|a| < 1$, sprendiniai užrašomi formule

$$x = (-1)^m x_0 + m\pi, \quad m \in \mathbf{Z},$$

čia x_0 yra lygties $\sin x = a$ sprendinys, priklausantis intervalui $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Iš tikrųjų, imdami m lyginius, $m = 2k$, gauname sprendinius $x = x_0 + 2k\pi$, imdami m nelyginius, $m = 2k + 1$ arba $m = 2k - 1$, gauname $x = -x_0 + (2k+1)\pi$ arba $x = -x_0 + (2k-1)\pi$. Taigi sprendžiant lygtį $\sin x = a$ svarbu surasti sprendinį x_0. Jam žymėti įvesime specialų žymenį.

APIBRĖŽIMAS

Lygties $\sin x = a$ ($|a| \leqslant 1$) *sprendinį, priklausantį intervalui* $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, *vadinsime skaičiaus a arksinusu ir žymėsime* $\arcsin a$.

Pavyzdžiui, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, nes $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ir $\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; $\arcsin 0=0$, nes $\sin 0=0$ ir $0\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; analogiškai $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

Taigi tikrinant, ar teisinga lygybė $\arcsin a=b$, reikia patikrinti, ar $\sin b=a$ ir, ar $b\in$ $\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Pavyzdžiui, lygybė $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$ yra neteisinga, nes nors $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, tačiau $\frac{3\pi}{4}\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Naudodami arksinuso žymenį lygties $\sin x=a$ ($|a|<1$) sprendinius dabar galime užrašyti taip:

$$x=(-1)^m\arcsin a+m\pi,\quad m\in\boldsymbol{Z}.$$

3 užduotis. Įsitikinkite, kad ši formulė teisinga ir kai $a=0$, $a=-1$, $a=1$.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pritaikę formulę gauname

$$2x=(-1)^m\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+m\pi,\quad x=\frac{1}{2}(-1)^m\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}m\pi,\quad m\in\boldsymbol{Z}.$$

Žinome, kad $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, sinuso funkcija yra nelyginė, todėl

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Matome, kad kampo $-\frac{\pi}{3}$ sinusas lygus $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, be to, $-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Taigi $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ir sprendinius galima užrašyti šitaip:

$$x=\frac{1}{2}(-1)^m\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}m\pi=\frac{\pi}{6}(-1)^{m+1}+\frac{1}{2}m\pi,\quad m\in\boldsymbol{Z}.$$

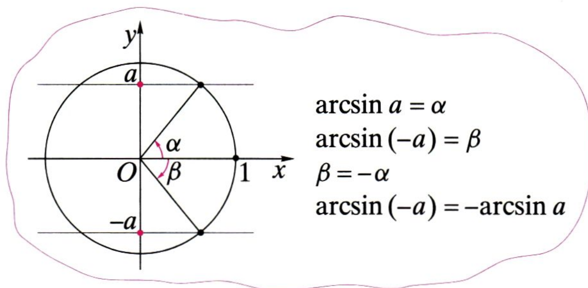
Spręsdami pavyzdį matėme, kad

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},\qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3},$$

taigi $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tai teisinga ir bendru atveju:

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\quad |a|\leqslant 1.$$

Galime tuo įsitikinti geometriškai (žr. brėžinį).



Jei $|a| > 1$, *tai lygtis* $\sin x = a$ *neturi sprendinių.*
Jei $|a| \leqslant 1$, *tai visi lygties* $\sin x = a$ *sprendiniai užrašomi formule*

$$x = (-1)^m \arcsin a + m\pi, \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

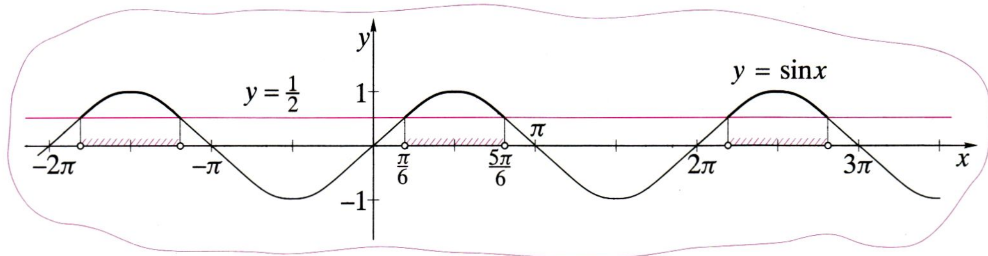
4 užduotis. Išspręskite lygtis: $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nelygybės $\sin x > a$, $\sin x < a$

Kai $|a| > 1$, tai nelygybės $\sin x > a$ sprendiniai yra arba visi skaičiai, arba sprendinių nėra. Pavyzdžiui, nelygybė $\sin x > -2$ teisinga su visais x, o nelygybė $\sin x > 3$ sprendinių neturi. Tą patį galima pasakyti ir apie nelygybę $\sin x < a$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\sin x > \frac{1}{2}$.

Nubraižykime funkcijų $y = \sin x$ ir $y = \frac{1}{2}$ grafikus.

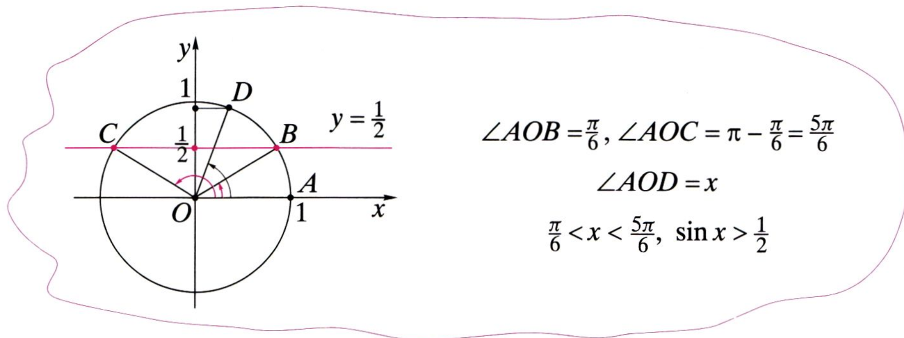


Nelygybės sprendiniai — tai Ox ašies intervalų, kuriuose sinusoidė yra aukščiau tiesės $y = \frac{1}{2}$, skaičiai. Tokių intervalų yra be galo daug. Jie visi gaunami pridedant prie intervalo $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ rėžių po $2k\pi$. Taigi nelygybės $\sin x > \frac{1}{2}$ sprendinių aibė yra visų intervalų

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

sąjunga.

Nelygybę $\sin x > \frac{1}{2}$ galima išspręsti ir nebraižant sinusoidės. Nubraižykime koordinačių sistemoje vienetinį apskritimą su centru koordinačių pradžios taške ir tiesę $y = \frac{1}{2}$. Pažymėkime apskritimo ir šios tiesės susikirtimo taškus.

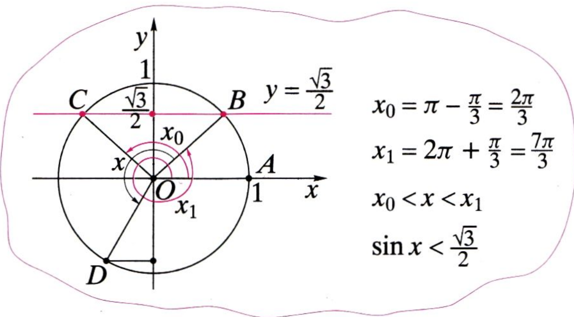


Iš brėžinio matyti, kad kampų, didesnių už $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$, bet mažesnių už $\angle AOC = \frac{5\pi}{6}$, sinusai yra didesni už $\frac{1}{2}$. Taigi $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ yra vienas nelygybės $\sin x > \frac{1}{2}$ sprendinių intervalas. Kitus gauname prie šio intervalo rėžių pridėję po $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Jau matėme, kad nelygybės sprendinių aibė yra intervalų sąjunga. Tokių intervalų yra be galo daug, visi jie gaunami iš vieno, pridedant prie rėžių po $2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$. Taigi pakanka rasti vieną sprendinių intervalą. Rasime šį intervalą geometriškai.

Nubrėžkime koordinačių plokštumoje vienetinį apskritimą su centru koordinačių pradžios taške, tiesę $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir pažymėkime jų susikirtimo taškus.

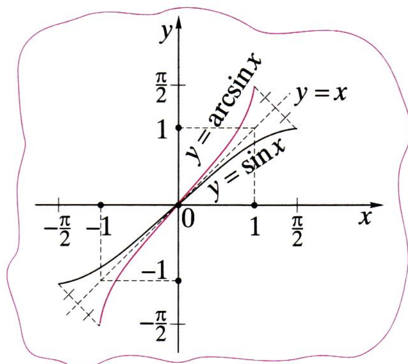


Iš brėžinio matome, kad jeigu pasuktume spindulį OA kampu x, tenkinančiu nelygybę $x_0 < x < x_1$, tai gautume, kad $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Taigi visi skaičiai iš intervalo $(x_0; x_1) = (\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3})$ yra nelygybės $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sprendiniai. Tada visa sprendinių aibė yra intervalų $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{7\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, sąjunga.

5 užduotis. Išspręskite nelygybę $\sin x < \frac{1}{2}$.

Funkcija $f(x) = \arcsin x$

Lygties $\sin x = a$ sprendinius užrašome vartodami arksinuso žymenį $\arcsin a$. Priskirdami kiekvienam intervalo $[-1; 1]$ skaičiui x jo arksinusą, gauname funkciją $y = \arcsin x$, apibrėžtą intervale $[-1; 1]$ ir įgyjančią reikšmes iš intervalo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $y = \sin x$, nagrinėjamai su nepriklausomo kintamojo reikšmėmis iš intervalo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Funkcijos $y = \arcsin x$ grafiką galime nubraižyti simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu atvaizduodami atitinkamą sinusoidės dalį.
Paveiksle pavaizduotas funkcijos $f(x) = \arcsin x$ grafikas.



Funkcija $y = \arcsin x$ *yra atvirkštinė funkcijai* $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. *Funkcija* $y = \arcsin x$ *apibrėžta intervale* $[-1; 1]$ *ir įgyja reikšmes iš intervalo* $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. *Ji yra nelyginė*: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Pratimai ir uždaviniai

39. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį: a) $\sin(2x)$; b) $\frac{1}{\sin x}$; c) $\sin \frac{1}{x}$.

40. Raskite reiškinio reikšmių sritį: a) $\sin(3x)$; b) $3\sin x$; c) $\sin^2 x$; d) $-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

41. Ar yra toks kampas, kurio sinusas lygus: a) $0{,}23$; b) $-1{,}5$; c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$?

42. Išdėstykite skaičius didėjimo tvarka:
a) $\sin 60°$, $\sin 75°$, $\sin(-30°)$, $\sin(-60°)$, $\sin 90°$;
b) $\sin \frac{\pi}{4}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin 0$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{3}{10}\pi\right)$.

43. Raskite funkcijos $f(x)$ didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = \sin(2x)$;
b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
c) $f(x) = \sin(-3x)$;
d) $f(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$.

44. Nubraižykite sinuso grafiką ir abscisių ašyje nurodykite taškus arba intervalus, vaizduojančius lygties arba nelygybės sprendinius:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; d) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

45. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \sin(2x)$; b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; c) $f(x) = \sin\frac{x}{3}$.

46. Nustatykite, ar reiškinys turi prasmę. Jeigu turi — apskaičiuokite jo reikšmę:

a) $\arcsin 0$; b) $\arcsin 1$; c) $\arcsin(-1)$;

d) $\arcsin\frac{1}{2}$; e) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; f) $\arcsin\frac{\pi}{2}$.

47. Apskaičiuokite:

a) $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\arcsin 1 + 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}$;

b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

48. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$:

a) $f(x) = \sin(2x)$; b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $f(x) = \sin(-3x)$; d) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

49. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 1$, jei:

a) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; d) $f(x) = \sqrt{3}\sin(-2x)$.

50. Išspręskite lygtį:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin(3x) = -\frac{1}{2}$; c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $\sin(2 - 3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$; f) $-4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$.

51. Raskite nelygybės sprendinius:

a) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-2\sin x \geqslant \sqrt{3}$;

c) $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \leqslant 0$; d) $3\sin(3x) > 6$.

52. Pasinaudoję grafikais raskite apytikslius lygties sprendinius:

a) $\sin x = 1 - x$; b) $\sin x = x^2$; c) $\sin(2x) = \frac{1}{2}x$; d) $\sin(\frac{1}{2}x) = -x$.

53. Suraskite tas m reikšmes, su kuriomis lygtis neturi sprendinių:

a) $\sin x = 3 + m$; b) $\sin x = 4 - m$;

c) $\sin x = 16 - m^2$; d) $\sin x = m^2 - 6$.

54. Išspręskite lygtį:

a) $\arcsin(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$; b) $\arcsin(x + 1) = \frac{\pi}{6}$.

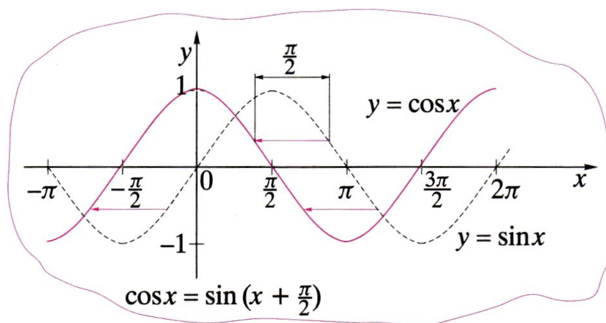
15.7. Funkcija $f(x) = \cos x$

Funkcijos $f(x) = \cos x$ grafikas

Nusibraižykime sinusoidę. Pasinaudosime šia kreive braižydami funkcijos $y = \cos x$ grafiką. Prisiminkime vieną redukcijos formulę: su visais x teisinga lygybė

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Norėdami atidėti funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko tašką $(x; \cos x)$ turime surasti $\cos x$. Tai padaryti galime naudodamiesi redukcijos formule ir sinusoide: padidinę x reikšmę dydžiu $\frac{\pi}{2}$ gausime $x + \frac{\pi}{2}$; šią reikšmę atitinkančio sinusoidės taško ordinatė $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ ir bus ieškomoji reikšmė $\cos x$.



Taigi funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko taškus gauname „patraukę“ į kairę per $\frac{\pi}{2}$ atitinkamus sinusoidės taškus. Ši „patraukta“ sinusoidė ir yra funkcijos $f(x) = \cos x$ grafikas. Gautąją kreivę vadinsime *kosinusoide*.

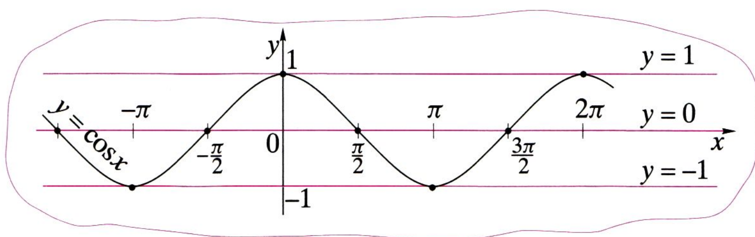
Funkcija $f(x) = \cos x$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo $[-1; 1]$. Ši funkcija yra lyginė ir periodinė su mažiausiu teigiamu periodu 2π. Intervaluose $[-\pi + 2n\pi; 2n\pi]$ ji didėja, o intervaluose $[2n\pi; \pi + 2n\pi]$ — mažėja; čia $n \in \mathbf{Z}$.

1 užduotis. Nubraižykite grafikus funkcijų:
$f(x) = \cos x - 1$, $f(x) = -2\cos x$, $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$.

Lygtis $\cos x = a$

Surasime tas x reikšmes, su kuriomis funkcija $f(x) = \cos x$ įgyja iš anksto nurodytą reikšmę a, t. y. panagrinėsime lygtį $\cos x = a$, čia x — nežinomasis, a — žinomas skaičius. Šios lygties sprendiniai yra funkcijų $y = a$ ir $y = \cos x$ grafikų (tiesės ir kosinusoidės) bendrų taškų abscisės.

Kai $|a| > 1$, tiesė $y = a$ nekerta kosinusoidės, todėl lygtis sprendinių neturi.
Kai $a = 1$, tiesės $y = 1$ ir kosinusoidės susikirtimo taškų abscisės yra $2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Kai $a = -1$, tiesė $y = -1$ ir kosinusoidė kertasi taškuose, kurių abscisės yra $\pi + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Kai $a = 0$, tiesė $y = 0$ ir kosinusoidė kertasi taškuose su abscisėmis $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.



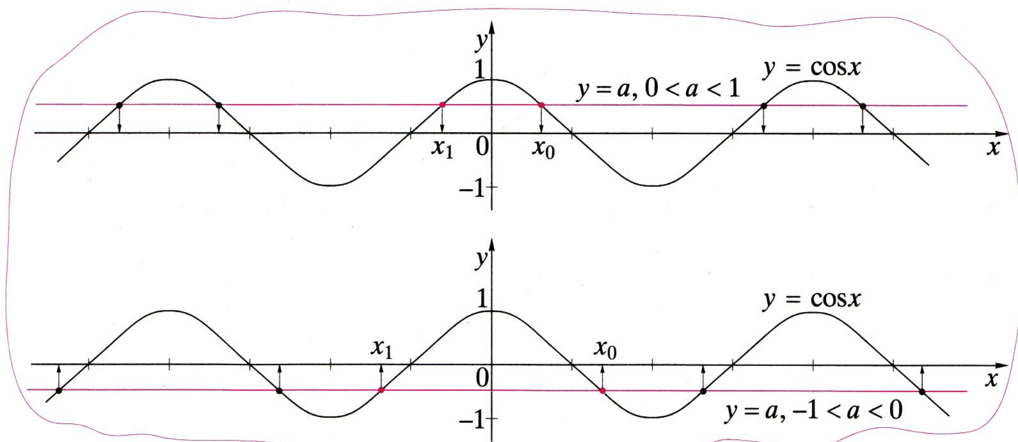
Visi lygties $\cos x = 1$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Visi lygties $\cos x = -1$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = \pi + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
Visi lygties $\cos x = 0$ *sprendiniai užrašomi formule* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\cos\frac{x}{2} = 1$.

Pritaikę pirmąją formulę gauname $\frac{x}{2} = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Taigi $x = 4k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, yra visi mūsų lygties sprendiniai.

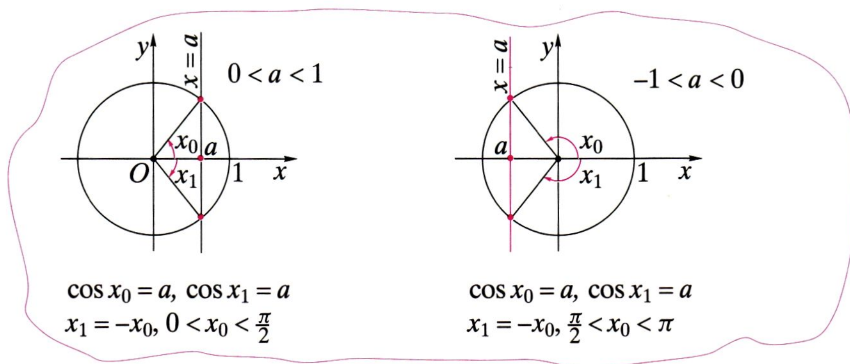
2 užduotis. Išspręskite lygtis $\cos(2x) = 1, \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$.

Dabar panagrinėkime lygtį $\cos x = a$ su $a \neq 0$, $|a| < 1$. Iš brėžinio matome, kad lygties $\cos x = a$ sprendiniai išsidėstę skaičių tiesėje poromis.



Pakanka surasti vieną sprendinių porą, pavyzdžiui, x_0 ir x_1, tada kitas gausime pridėję prie x_0 ir x_1 po $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Šią porą galime rasti pasinaudoję vienetiniu apskritimu. Nubrėžkime tiesę $x = a$ ir vienetinį apskritimą su centru koordinačių pradžios taške, pažymėkime tiesės ir apskritimo susikirtimo taškus, sujunkime juos spinduliais su apskritimo centru ir pažymėkime du posūkio kampus.



Gavome du kampus, kurių kosinusai lygūs a, taigi šių kampų didumai x_0 ir x_1 yra lygties $\cos x = a$ sprendiniai. Matome, kad $x_1 = -x_0$, o x_0 priklauso intervalui $[0; \pi]$. Taigi visus lygties $\cos x = a$ sprendinius galime užrašyti taip: $x = x_0 + 2k\pi$, $x = x_1 + 2k\pi = -x_0 + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Patogu vietoj dviejų formulių naudoti vieną:

$$x = \pm x_0 + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Sprendiniui x_0, priklausančiam intervalui $[0; \pi]$, žymėti įvesime specialų žymenį.

APIBRĖŽIMAS

Lygties $\cos x = a$ $(|a| \leqslant 1)$, *sprendinį, priklausantį intervalui* $[0; \pi]$, *vadinsime skaičiaus a arkkosinusu ir žymėsime* $\arccos a$.

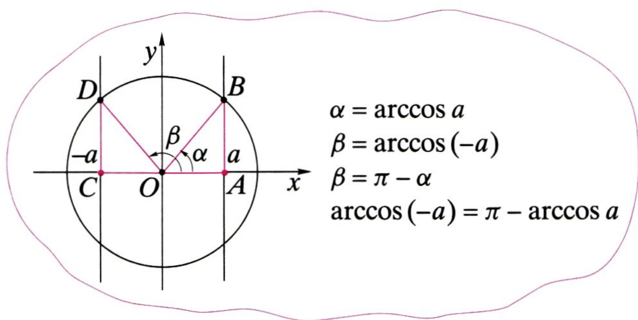
Taigi skaičiaus a $(|a| \leqslant 1)$ arkkosinusas yra intervalo $[0; \pi]$ skaičius, kurio kosinusas lygus a. Pavyzdžiui, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, nes $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ir $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$.
Visus lygties $\cos x = a$ $(|a| < 1)$ sprendinius dabar galime užrašyti taip:

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

3 užduotis. Įsitikinkite, kad ši formulė tinka ir lygčių $\cos x = a$, kai $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$ sprendiniams užrašyti.

Kai $|a| > 1$, *lygtis* $\cos x = a$ *neturi sprendinių.*
Kai $|a| \leqslant 1$, *visi jos sprendiniai užrašomi formule* $x = \pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Iš brėžinio matėme: kai $0 \leqslant a \leqslant 1$, tai $0 \leqslant \arccos a \leqslant \frac{\pi}{2}$; kai $-1 \leqslant a \leqslant 0$, tai $\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos a \leqslant \pi$. Nustatysime sąryšį tarp $\arccos a$ ir $\arccos(-a)$, kai $0 < a \leqslant 1$. Tame pačiame brėžinyje atidėkime kampus $\arccos a$ ir $\arccos(-a)$.



Iš trikampių OAB ir OCD lygybės gauname, kad $\angle AOB = \angle COD$, t. y. $\angle AOD = \pi - \angle AOB$ arba $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$. Pritaikę lygties $\cos x = a$ sprendinių formulę gauname

$$x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Tačiau $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, taigi visi lygties sprendiniai užrašomi formule $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
Galime juos užrašyti ir dviem formulėmis

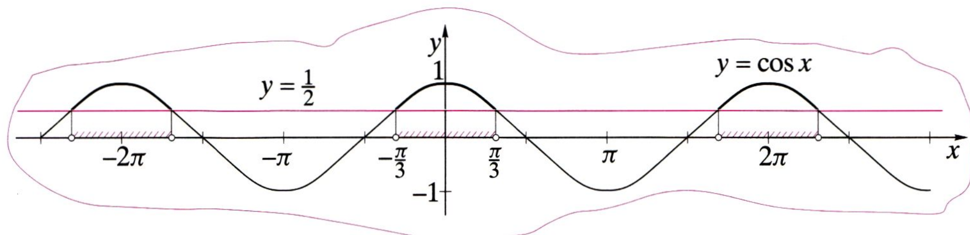
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Nelygybės $\cos x > a$, $\cos x < a$

Kai $|a| > 1$, tokios nelygybės arba neturi sprendinių, arba jų sprendiniai yra visi realieji skaičiai.

Kai $|a| \leqslant 1$, nelygybes $\cos x > a$ arba $\cos x < a$ nesunku išspręsti nusibraižius kosinusoidę.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\cos x > \frac{1}{2}$.

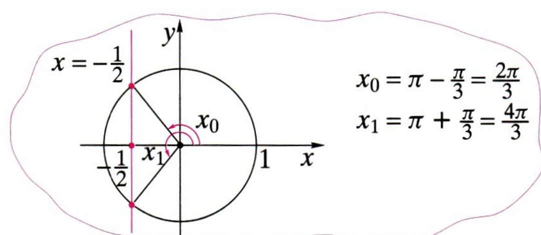


Iš brėžinio matome, kad nelygybės sprendinių aibę sudaro begalinio skaičiaus intervalų sąjunga. Visi intervalai gali būti gaunami iš vieno intervalo pridedant prie jo rėžių po $2k\pi$. Taigi nelygybės sprendinių aibė yra visų intervalų $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, sąjunga.

Nelygybes $\cos x < a$ arba $\cos x > a$ galima spręsti ir nebraižant kosinusoidės.

4 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\cos x < -\frac{1}{2}$.

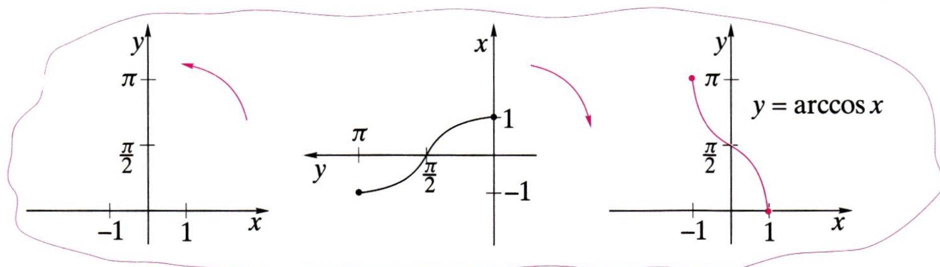
Koordinačių plokštumoje nubraižykime vienetinį apskritimą su centru koordinačių pradžioje ir tiesę $x = -\frac{1}{2}$. Pažymėkime apskritimo ir tiesės susikirtimo taškus, sujunkime juos su apskritimo centru ir pažymėkime atitinkamus posūkio kampus.



Iš brėžinio matome, kad posūkio kampų, kurių didumai x tenkina nelygybę $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$, kosinusai yra mažesni už $-\frac{1}{2}$. Taigi visi intervalo $(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3})$ skaičiai yra nelygybės $\cos x < -\frac{1}{2}$ sprendiniai. Visą sprendinių aibę gausime sujungę visus intervalus $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Funkcija $f(x) = \arccos x$

Priskirdami kiekvienam intervalo $[-1; 1]$ skaičiui x jo arkkosinusą gauname funkciją $y = \arccos x$, apibrėžtą intervale $[-1; 1]$ ir įgyjančią reikšmes iš intervalo $[0; \pi]$. Ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $y = \cos x$, nagrinėjamai su nepriklausomo kintamojo reikšmėmis iš intervalo $[0; \pi]$. Funkcijos $y = \arccos x$ grafiką galime nubraižyti simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu atvaizduodami atitinkamą kosinusoidės dalį. Štai lengviausias būdas nubraižyti funkcijos $y = \arccos x$ grafiką: nubraižykite koordinačių sistemos ašis, pasukite popieriaus lapą stačiu kampu, kad Oy ašis būtų nukreipta į kairę, nubraižykite dalį kosinusoidės ir pasukite popieriaus lapą atgal. Prieš jus — funkcijos $y = \arccos x$ grafikas!



Matome, kad funkcija $f(x) = \arccos x$ nėra nei lyginė, nei nelyginė. Tačiau reikšmes $\arccos a$ ir $\arccos(-a)$ sieja paprastas ryšys:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \qquad |a| \leqslant 1$$

Jau anksčiau įrodėme, kad ši lygybė teisinga, kai $0 < a < 1$.
Galima įsitikinti, kad ji teisinga visiems skaičiams a, $|a| \leqslant 1$.

4 užduotis. Apskaičiuokite $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Funkcija $y = \arccos x$ yra atvirkštinė funkcijai $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.
Funkcija $y = \arccos x$ apibrėžta intervale $[-1; 1]$ ir įgyja reikšmes iš intervalo $[0; \pi]$.
Ji nėra nei lyginė, nei nelyginė.

Pratimai ir uždaviniai

55. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\cos(3x)$; b) $\frac{1}{\cos x}$; c) $\cos \frac{1}{x}$.

56. Raskite reiškinio reikšmių sritį:

a) $\cos(2x)$; b) $2\cos x$; c) $\cos^2 x$; d) $-\frac{1}{3}\cos^2 x$.

57. Ar gali kosinusas būti lygus:

a) $-0{,}3$; b) $1{,}4$; c) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$?

58. Išdėstykite skaičius didėjimo tvarka:

a) $\cos 60^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos(-30^\circ)$, $\cos(-60^\circ)$, $\cos 90^\circ$;

b) $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos 0^\circ$, $\cos\frac{\pi}{6}$.

59. Raskite funkcijos $f(x)$ didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = \cos(3x)$; b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
c) $f(x) = \cos(-2x)$; d) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

60. Nubraižykite kosinuso grafiką ir abscisių ašyje pažymėkite lygties arba nelygybės sprendinius:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

61. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $f(x) = \cos(3x)$; b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; c) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

62. Nustatykite, ar reiškinys turi prasmę. Jeigu turi — apskaičiuokite jo reikšmę:

a) $\arccos 0$; b) $\arccos 1$; c) $\arccos(-1)$;

d) $\arccos \frac{1}{2}$; e) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; f) $\arccos \frac{\pi}{2}$.

63. Apskaičiuokite:

a) $2\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos 1 + 2\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\arccos \frac{1}{2}$;

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\arccos 0 + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

64. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$, jei:

a) $f(x) = \cos(3x)$; b) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $f(x) = \cos(-2x)$; d) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

65. Raskite x reikšmes, su kuriomis $|f(x)| = 1$, jei:

a) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $f(x) = \sqrt{3}\cos(-3x)$;

e) $f(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

66. Išspręskite lygtį:

a) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$; b) $\cos(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\cos\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\cos(4 - 3x) = -\frac{1}{2}$;

e) $3\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5$; f) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$.

67. Raskite nelygybės sprendinius:

a) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$; b) $-2\cos x > -4$;

c) $4\cos\left(\frac{1}{4}x\right) > 2\sqrt{3}$; d) $5\cos(5x) \leqslant -5$.

68. Remdamiesi grafikais raskite apytikslius lygties sprendinius:

a) $\cos x = -x + 1$; b) $\cos x = -x^2$;

c) $\cos(2x) = -\frac{1}{2}x$; d) $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = x$.

69. Nustatykite, su kuriomis m reikšmėmis lygtis turi sprendinių:

a) $\cos x = 2 + m$; b) $\cos x = 5 - m$;

c) $\cos x = m^2 - 25$; d) $\cos x = 7 - m^2$.

70. Išspręskite lygtį:

a) $\arccos(x^2 - 2) = \pi$;

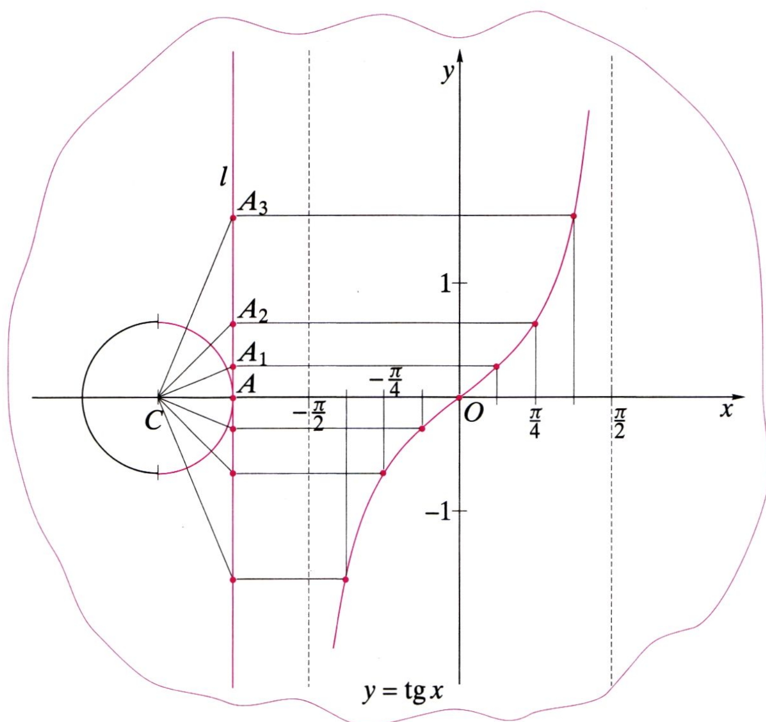
b) $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$.

15.8. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ yra apibrėžta su visais x, išskyrus $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ Nubraižysime šios funkcijos grafiką, kai $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

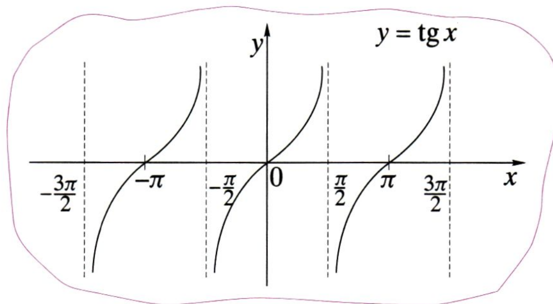
Nubrėžkime koordinačių sistemos ašis, o šalia, kaip parodyta brėžinyje — vienetinį apskritimą ir jo liestinę l, statmeną Ox ašiai. Padalykime Ox ašies intervalą $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ir dešiniąją apskritimo pusę į tiek pat atitinkamai lygių dalių (brėžinyje padalyta į aštuonias dalis). Iš apskritimo centro C per dalijimo taškus išveskime tieses ir pažymėkime jų susikirtimo su liestine l taškus.



Ašyje Ox atidėjome kintamojo x reikšmes, o ant apskritimo pažymėjome taškus, į kuriuos pereitų taškas A, spindulį CA pasukus kampais, kurių didumai pažymėti Ox ašyje. Imkime, pavyzdžiui, $x = \frac{\pi}{4}$. Kadangi $\angle ACA_2 = \frac{\pi}{4}$, tai $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{AA_2}{CA} = AA_2$. Todėl funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiko taškas su $x = \frac{\pi}{4}$ sutampa su tiesės, išvestos per A_2 lygiagrečiai Ox ašiai, ir tiesės $x = \frac{\pi}{4}$ susikirtimo tašku. Panašiai galime rasti grafiko taškus su kitomis x reikšmėmis. Sujungę juos kreive gausime funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafiką, kai $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Kadangi funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ yra periodinė su mažiausiu teigiamu periodu $T = \pi$, tai intervale $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ šios funkcijos grafiką gausime „pastūmę“ nubraižytąją kreivę į dešinę per π.

„Pastūmę“ tą pačią kreivę per $n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$) (į dešinę arba į kairę priklausomai nuo n ženklo) gausime funkcijos grafiką intervale $(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi)$.

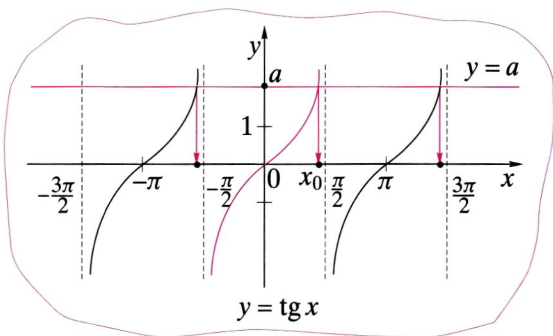


Funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ grafikas vadinamas *tangentoide*. Taigi tangentoidė yra sudaryta iš be galo daug dalių, kurios neturi bendrų taškų.

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ apibrėžta su visomis x reikšmėmis išskyrus $\frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$). Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė. Funkcija yra nelyginė ir periodinė; mažiausias teigiamas periodas lygus π.
Kiekviename intervale $(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi)$ ($n \in \mathbf{Z}$) funkcija didėja.

Lygtis $\operatorname{tg} x = a$

Panagrinėsime lygtį $\operatorname{tg} x = a$, čia x — nežinomasis, o a — žinomas skaičius. Nubraižykime toje pačioje koordinačių sistemoje tangentoidę ir tiesę $y = a$.



Matome, kad su bet kokiu skaičiumi a tangentoidė ir tiesė $y = a$ turi be galo daug sankirtos taškų, jų abscisės yra lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendiniai. Ši lygtis kiekviename intervale $(-\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi)$ turi po vieną sprendinį.

Pažymėję x_0 sprendinį, esantį intervale $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$, visus sprendinius galime užrašyti formule

$$x = x_0 + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

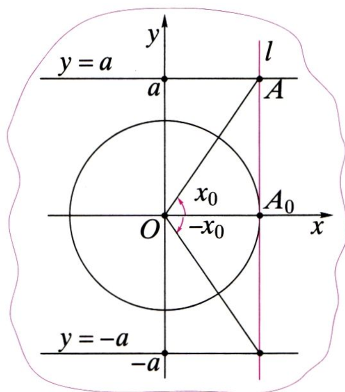
APIBRĖŽIMAS

Lygties $\operatorname{tg} x = a$ $(-\infty < a < +\infty)$ *sprendinį, priklausantį intervalui* $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, *vadinsime skaičiaus a arktangentu ir žymėsime* $\operatorname{arctg} a$.

Pavyzdžiui, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, nes $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ ir $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ ir t. t.
Taigi vartodami arktangento žymenį galime visus lygties $\operatorname{tg} x = a$ sprendinius užrašyti formule:

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Skaičiaus arktangento galime ieškoti geometriškai. Nubrėžkime vienetinį apskritimą su centru koordinačių sistemos pradžioje ir šio apskritimo liestinę, einančią per tašką $A_0(1; 0)$. Nubrėžkime tiesę $y = a$ ir pažymėkime jos susikirtimo su liestine l tašką A bei atitinkamą posūkio kampą. Šio kampo tangentas lygus a, o kampas x_0 priklauso intervalui $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, taigi $x_0 = \operatorname{arctg} a$.



Iš šio brėžinio taip pat matome, kad

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

Ši lygybė teisinga visiems a. Pavyzdžiui,

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Lygtis $\operatorname{tg} x = a$ *su bet kokiu a turi be galo daug sprendinių. Visi sprendiniai užrašomi formule* $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$; b) $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x) = 0$.
a) Pritaikę sprendinių formulę lygčiai $\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$ gauname:

$$2x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + n\pi, \qquad 2x = \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

Taigi visi sprendiniai užrašomi formule $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.
b) Panašiai sprendžiame ir lygtį $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x) = 0$:

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{arctg} 0 + n\pi, \qquad \frac{1}{2}x = n\pi.$$

Visi sprendiniai užrašomi formule $x = 2n\pi$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.

Užduotis. Išspręskite lygtį $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Panagrinėsime pavyzdžių, kai sudėtingesnės trigonometrinės lygtys pertvarkomos į lygtis $\operatorname{tg} x = a$.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį:
a) $2\sin x + \cos x = 0$; b) $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$.

a) Patikrinkime, ar ši lygtis gali turėti sprendinį x, su kuriuo $\cos x = 0$. Jeigu toks sprendinys būtų, tai tada gautume $\sin x = 0$. Tačiau sinusas ir kosinusas niekada kartu nėra lygūs nuliui (juk visiems x teisinga lygybė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Taigi nagrinėdami lygtį $2\sin x + \cos x = 0$ tik su tais x, kuriems $\cos x \neq 0$, sprendinių neprarasime. Tada lygties abi puses galime dalyti iš $\cos x$. Padaliję ir pasinaudoję tuo, kad $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, gauname

$$2\operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Taigi

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

ir

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi, \qquad x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

b) Panašiai sprendžiame ir lygtį $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$. Ši lygtis taip pat neturi sprendinių, kuriems būtų $\cos x = 0$. Abi lygties puses padalijame iš $\cos^2 x$ ir gauname:

$$4\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 6 = 0.$$

Pažymėję $\operatorname{tg} x = m$ gauname lygtį

$$4m^2 - 5m - 6 = 0,$$

kurios sprendiniai $m_1 = 2$ ir $m_2 = -\frac{3}{4}$. Taigi

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{arba} \qquad \operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}.$$

Iš čia gauname:

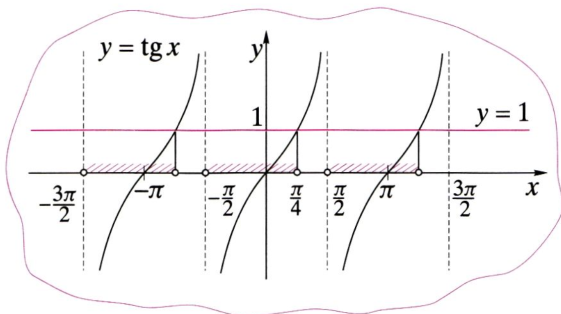
$$x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi \quad \text{arba} \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) + n\pi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Nelygybės $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$

Nelygybių $\operatorname{tg} x > a$ arba $\operatorname{tg} x < a$ (taip pat ir $\operatorname{tg} x \leqslant a$, $\operatorname{tg} x \geqslant a$) sprendinių aibes nesunku surasti nusibraižius funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafiką.

3 PAVYZDYS. Išspręskime nelygybę $\operatorname{tg} x < 1$.

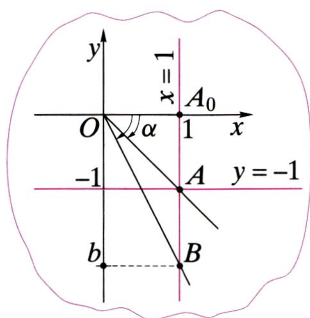
Nubraižykime funkcijų $y = \operatorname{tg} x$ ir $y = 1$ grafikus.



Nelygybės sprendiniai — tai skaičiai, atidėti Ox ašyje, kuriuos atitinkantys tangentoidės taškai yra žemiau tiesės $y = 1$. Matome, kad sprendinių aibę sudaro be galo daug intervalų, kurie gaunami iš intervalo $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4})$ pridėjus prie jo rėžių periodo π kartotinius. Taigi nelygybės sprendinių aibė yra visų intervalų $(-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, sąjunga.

Nelygybes $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x > a$ (arba ir negriežtas nelygybes) galima spręsti ir nebraižant tangentoidės. Žinome, kad pakanka rasti vieną sprendinių intervalą, nes kitus gauname iš jo pridėdami prie rėžių periodo π kartotinius.

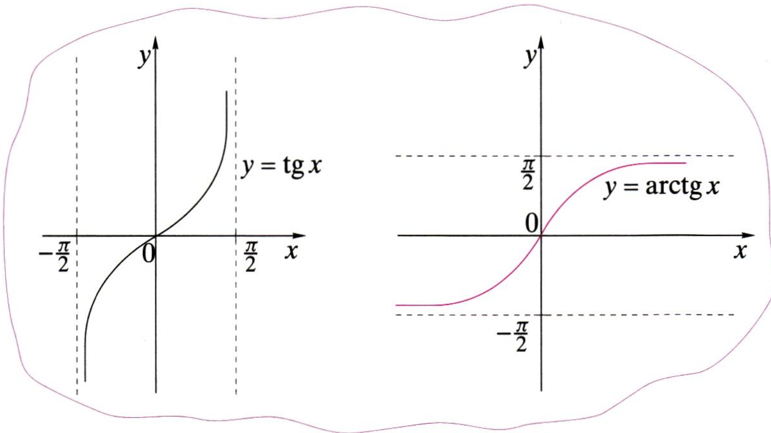
Pavyzdžiui, vieną nelygybės $\operatorname{tg} x \leqslant -1$ sprendinių intervalą galime surasti nusibraižę koordinačių sistemoje tieses $x = 1$ ir $y = -1$.



Iš brėžinio matome, kad kai $\angle A_0OA = \alpha = -\frac{\pi}{4}$, tai $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Atidėję $\angle A_0OB = \beta$ taip, kad $-\frac{\pi}{2} < \beta < -\frac{\pi}{4}$, gauname: $\operatorname{tg} \beta = b$, $b < -1$. Taigi $(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}]$ yra nelygybės $\operatorname{tg} x \leqslant -1$ sprendinių intervalas. Nelygybės $\operatorname{tg} x \leqslant -1$ sprendinių aibė yra intervalų $(-\frac{\pi}{2} + n\pi; -\frac{\pi}{4} + n\pi]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, sąjunga.

Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Spręsdami lygtis naudojomės arktangento sąvoka. Kiekvienam realiajam skaičiui priskirdami jo arktangentą gauname funkciją, apibrėžtą visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančią reikšmes iš intervalo $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $y = \operatorname{tg} x$, kai $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Taigi arktangento grafiką galime nubraižyti atvaizdavę vieną tangentoidės šaką simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu.



Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ *apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo* $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. *Funkcija* $y = \operatorname{arctg} x$ *yra nelyginė*: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Pratimai ir uždaviniai

71. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $2\operatorname{tg}(2x)$; c) $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$; d) $\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}$.

72. Raskite reiškinio reikšmių sritį:

a) $\operatorname{tg}(3x)$; b) $3\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; c) $\operatorname{tg}^2 x$; d) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$.

73. Išdėstykite skaičius didėjimo tvarka:

a) $\operatorname{tg} 50°$, $\operatorname{tg}(-50°)$, $\operatorname{tg} 30°$, $\operatorname{tg} 80°$;

b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{tg} 0$.

74. Nubraižykite tangento grafiką intervale $(-2\pi; 3\pi)$ ir raskite lygties arba nelygybės sprendinius, priklausančius šiam intervalui:

a) $\operatorname{tg} x = 1$; b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; c) $\operatorname{tg} x < -1$; d) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

75. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką, išvardykite funkcijos savybes:

a) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$; b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

76. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$, jei:

a) $f(x) = \operatorname{tg}(3x)$;
b) $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$;
c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$;
d) $f(x) = -\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

77. Raskite x reikšmes, su kuriomis $|f(x)| = 1$, jei:

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
b) $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{tg}(2x)$;
c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
d) $f(x) = 5\operatorname{tg}(5x)$.

78. Apskaičiuokite:

a) $\operatorname{arctg} 0$; b) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\operatorname{arctg}(-1)$; d) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

79. Apskaičiuokite:

a) $3\operatorname{arctg} 1 + 2\operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;
b) $2\operatorname{arctg}(-1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 0{,}3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

80. Išspręskite lygtį:

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;
b) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$;
c) $\operatorname{tg}(2 - 3x) = 1$;
d) $\operatorname{tg}(3x - 2) = -1$;
e) $-2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$;
f) $3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$.

81. Raskite nelygybės sprendinius:

a) $2\operatorname{tg} x \geqslant -2$; b) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $3\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; d) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{15}$.

82. Išspręskite lygtį:

a) $\sin x - \cos x = 0$;
b) $\sin x + \cos x = 0$;
c) $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$;
d) $2\sin(2x) - 3\cos(2x) = 0$;
e) $\sin^3 x - 3\sin x\cos^2 x = 0$;
f) $\sin(3x)\cos(3x) + \sqrt{3}\cos^2(3x) = 0$;
g) $5\sin x + 6\cos x = 0$;
h) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

83. Išspręskite lygtį:

a) $\cos^2 x + 3\sin x\cos x - 2 = 0$;
b) $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4$;
c) $4\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3 = 0$;
d) $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$;
e) $\sqrt{3}\sin(2x)\cos(2x) = 1 - \cos^2(2x)$;
f) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$.

84. Išspręskite lygtį:

a) $\operatorname{arctg}(3x + 1) = 0$;
b) $\operatorname{arctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

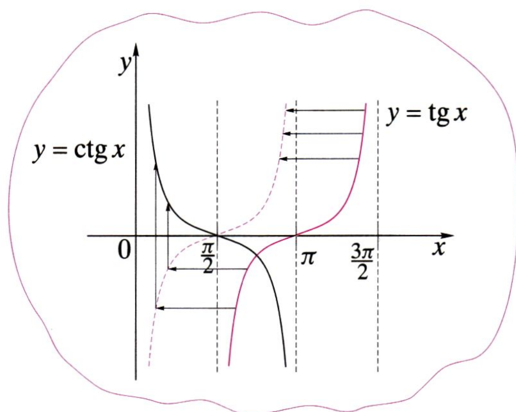
15.9. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ grafikas

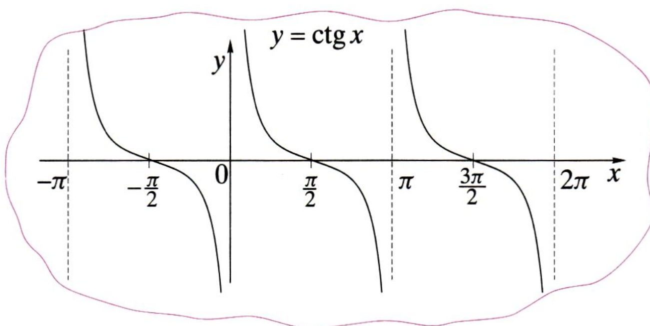
Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ apibrėžta su visais x, išskyrus $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Nubraižysime šios funkcijos grafiką. Jau žinome, kaip braižoma tangentoidė, t. y. funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafikas. Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ grafiką braižysime naudodamiesi tangentoide ir redukcijos formule:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x \quad \text{arba} \quad \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Iš šios formulės darome tokią išvadą: funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ grafiko taško, atitinkančio nepriklausomojo kintamojo reikšmę x, ordinatė lygi funkcijos $g(x) = \operatorname{tg} x$ grafiko taško, atitinkančio nepriklausomojo kintamojo reikšmę $x + \frac{\pi}{2}$, ordinatei, paimtai su priešingu ženklu. Kitaip tariant, funkcijos $y = \operatorname{ctg} x$ grafiką gausime „patraukę“ funkcijos $y = \operatorname{tg} x$ grafiką į kairę per $\frac{\pi}{2}$ ir atvaizdavę jį simetriškai tiesės Ox atžvilgiu.



Pasinaudoję tuo, kad kotangento mažiausias teigiamas periodas yra π, galime nubraižyti funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ grafiką ir kituose intervaluose.

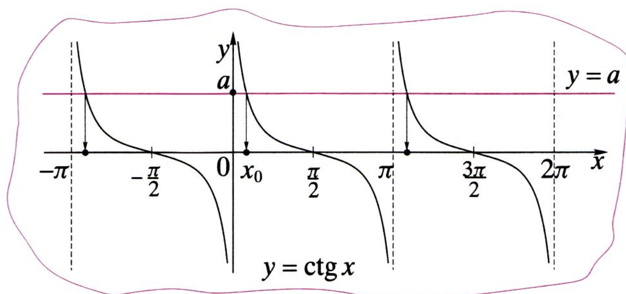


Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ grafikas vadinamas *kotangentoide*.

Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ apibrėžta su visomis x reikšmėmis išskyrus $n\pi$ $(n \in \boldsymbol{Z})$. Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė. Funkcija yra nelyginė ir periodinė; mažiausias teigiamas periodas lygus π.
Kiekviename intervale $(n\pi; \pi + n\pi)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, funkcija yra mažėjanti.

Lygtis $\operatorname{ctg} x = a$

Surasime lygties $\operatorname{ctg} x = a$, čia x — nežinomasis, o a — žinomas skaičius, sprendinius. Nubraižykime toje pačioje koordinačių sistemoje kotangentoidę ir tiesę $y = a$.



Matome, kad su bet kokiu a kotangentoidė ir tiesė $y = a$ turi be galo daug susikirtimo taškų, jų abscisės yra lygties $\operatorname{ctg} x = a$ sprendiniai. Ši lygtis kiekviename intervale $(n\pi; \pi + n\pi)$ turi po vieną sprendinį.

Visus juos galima gauti iš sprendinio x_0, priklausančio intervalui $(0; \pi)$, pridedant kotangento periodo kartotinius:

$$x = x_0 + n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

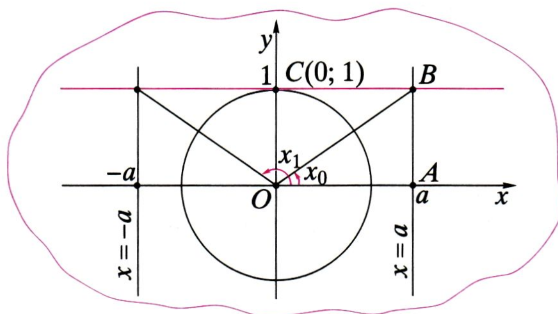
APIBRĖŽIMAS
Lygties $\operatorname{ctg} x = a$ $(-\infty < a < \infty)$ *sprendinį, priklausantį intervalui* $(0; \pi)$, *vadinsime skaičiaus a arkkotangentu ir žymėsime* $\operatorname{arcctg} a$.

Pavyzdžiui, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, nes $0 < \frac{\pi}{4} < \pi$ ir $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ ir t. t.
Taigi visi lygties $\operatorname{ctg} x = a$ sprendiniai užrašomi formule

$$x = \operatorname{arcctg} a + n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Skaičiaus arkkotangento galime ieškoti geometriškai. Nubrėžkime vienetinį apskritimą su centru koordinačių sistemos pradžioje ir šio apskritimo liestinę, einančią per tašką $C(0; 1)$. Nubrėžkime tiesę $x = a$ $(a > 0)$ ir pažymėkime jos susikirtimo su liestine

tašką B bei atitinkamą posūkio kampą x_0. Šio kampo tangentas lygus kampo $\angle AOB$ kotangentui, taigi $\operatorname{ctg} x_0 = \frac{OA}{AB} = OA = a$, be to, x_0 priklauso intervalui $(0; \pi)$, todėl $x_0 = \operatorname{arcctg} a$.



Iš šio brėžinio taip pat matome, kad $\operatorname{arcctg}(-a) = x_1$; $x_1 = \pi - x_0$, taigi

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$$

Ši lygybė teisinga visiems a. Pavyzdžiui,

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \frac{3\pi}{4}, \qquad \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Lygtis $\operatorname{ctg} x = a$ *su bet kokiu* a *turi be galo daug sprendinių. Visi sprendiniai užrašomi formule* $x = \operatorname{arcctg} a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

PAVYZDŽIAI. Išspręskime lygtį: a) $\operatorname{ctg}(3x) = -\sqrt{3}$; b) $\operatorname{ctg}(2x) = 0$.

a) Lygtį sprendžiame iš karto taikydami sprendinių formulę:

$$3x = \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + n\pi, \qquad x = \frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{n}{3}\pi.$$

Kadangi $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, tai visi lygties $\operatorname{ctg}(3x) = -\sqrt{3}$ sprendiniai užrašomi formule

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{n}{3}\pi = \frac{5\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Taikydami sprendinių formulę gauname:

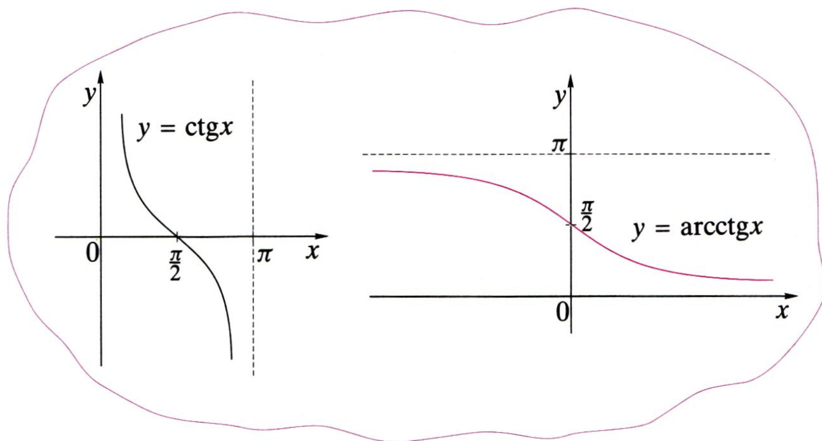
$$2x = \operatorname{arcctg} 0 + n\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Užduotis. Išspręskite lygtį $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nelygybių $\operatorname{ctg} x > a$ ir $\operatorname{ctg} x < a$ sprendinių aibės sudarytos iš be galo daug intervalų. Tokios nelygybės sprendžiamos analogiškai kaip nelygybės su tangentais.

Funkcija $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

Kiekvienam realiajam skaičiui priskirdami jo arkkotangentą gauname funkciją, apibrėžtą visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančią reikšmes iš intervalo $(0; \pi)$. Ši funkcija yra atvirkštinė funkcijai $y = \operatorname{ctg} x$, kai $0 < x < \pi$. Nubraižysime šios funkcijos grafiką.



Funkcija $y = \operatorname{arcctg} x$ *apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyja reikšmes iš intervalo* $(0; \pi)$. *Funkcija* $y = \operatorname{arcctg} x$ *nėra nei lyginė, nei nelyginė.*

Pratimai ir uždaviniai

85. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:

a) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $\operatorname{ctg}(-3x)$; c) $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; d) $\frac{1}{\operatorname{ctg} x+1}$.

86. Raskite reiškinio reikšmių sritį:

a) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x\right)$; b) $\operatorname{ctg}(3x)$; c) $\operatorname{ctg}^2 x$; d) $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x - 1$.

87. Išdėstykite skaičius didėjimo tvarka:

a) $\operatorname{ctg} 110°$, $\operatorname{ctg} 100°$, $\operatorname{ctg} 90°$, $\operatorname{ctg} 30°$, $\operatorname{ctg} 5°$, $\operatorname{ctg} 75°$;

b) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{ctg} 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

88. Nubraižykite kotangento grafiką intervale $(-2\pi; 3\pi)$ ir raskite lygčių ir nelygybių sprendinius, priklausančius šiam intervalui:

a) $\operatorname{ctg} x = 1$; b) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\pi}{6}$; c) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; d) $\operatorname{ctg} x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

89. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \operatorname{ctg}(3x)$; b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; c) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

90. Raskite x reikšmes, su kuriomis $f(x) = 0$, jei:

a) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x)$;
b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$;
c) $f(x) = -\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
d) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$.

91. Raskite x reikšmes, su kuriomis $|f(x)| = 1$, jei:

a) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
b) $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{ctg}(3x)$;
c) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
d) $f(x) = 3\operatorname{ctg}(3x)$.

92. Apskaičiuokite:

a) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; b) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; c) $\operatorname{arcctg} 1$.

93. Apskaičiuokite:

a) $2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 0 + \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 1$;

b) $\frac{1}{5}\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + 3\operatorname{arcctg}(-1) + \frac{2}{5}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

94. Išspręskite lygtį:

a) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1$;
b) $\operatorname{ctg}(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
c) $\operatorname{ctg}(3x) = \sqrt{3}$;
d) $\operatorname{ctg}(2 - 3x) = -1$;
e) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
f) $2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right) = -2$.

95. Raskite nelygybės sprendinius:

a) $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$; b) $3\operatorname{ctg} x < \sqrt{9}$; c) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x > -\frac{2}{\sqrt{3}}$; d) $0{,}5\operatorname{ctg} x \leqslant -\frac{1}{2}$.

96. Išspręskite lygtį:

a) $\sin(2x)\operatorname{tg} x = 0$;
b) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos x} = 0$;
c) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;
d) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$;
e) $\cos x \operatorname{tg}(2x) = 0$;
f) $\sin x \operatorname{tg}(2x) = 0$.

97. Išspręskite lygtį:

a) $\operatorname{arcctg}(x + 2) = \frac{\pi}{6}$; b) $\operatorname{arcctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Atsivertę lotynų kalbos žodyną pamatysite, kad žodis „sinus“ reiškia išlinkimą, išrietimą, o taip pat jūros įlanką ir daugelį kitų dalykų.
Kaip atsirado toks keistas dviejų stačiojo trikampio kraštinių ilgių santykio pavadinimas?
Indų matematikas Aryabhata sinusą vadino styga, arabai — taip pat styga, tačiau trumpindami rašė tik dvi žodžio raides: jb. Vėlesnieji raštininkai sutikę jiems beprasmį trumpinį „jb“ keitė jį į arabišką žodį „jaib“, kuris reiškė įlanką. Taigi vertėjams į lotynų kalbą jau nebereikėjo galvoti, kokį žodį pasirinkti!

15.10. Trigonometrinės formulės

Jau žinome keletą formulių, siejančių to paties kampo trigonometrines funkcijas:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

Trigonometrinių formulių yra ir daugiau, gali pasirodyti, kad jų yra labai daug. Jos tarpusavyje susijusios, dažnai vienos lengvai išvedamos iš kitų. Pavyzdžiui, kai $\cos\alpha\neq 0$, tai padaliję abi lygybės $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ puses iš $\cos^2\alpha$ gauname naują trigonometrinę formulę

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\text{arba}\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Trigonometrinėmis formulėmis naudojamės skaičiuodami trigonometrinių funkcijų reikšmes, spręsdami trigonometrines lygtis bei pertvarkydami reiškinius.

1 PAVYZDYS. Raskime $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$, kai $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ ir $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
Iš formulės $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ gauname $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Kampas α priklauso antrajam ketvirčiui, todėl jo kosinusas neigiamas:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}.$$

Rasime tangentą ir kotangentą:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{5}{12}.$$

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $2\sin^2 x-7\cos x-5=0$; b) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.
a) Pasinaudoję formule $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ išreikškime $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ir pertvarkykime lygtį taip:

$$2(1-\cos^2 x)-7\cos x-5=0,\qquad 2\cos^2 x+7\cos x+3=0.$$

Pažymėję $\cos x=m$ gauname kvadratinę lygtį $2m^2+7m+3=0$.
Šios lygties sprendiniai: $m_1=-3$, $m_2=-\frac{1}{2}$. Su $m=-3$ lygtis $\cos x=-3$ sprendinių neturi, nes $f(x)=\cos x$ įgyja reikšmes tik iš intervalo $[-1;1]$.
Kai $m=-\frac{1}{2}$, tai $\cos x=-\frac{1}{2}$, todėl $x=\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2n\pi$. Kadangi $\arccos(-\frac{1}{2})=$ $=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, tai visi lygties sprendiniai užrašomi formule

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2n\pi,\quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

b) Lygtyje $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$ pakeitę $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ gauname lygtį $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=2$. Pažymėję $\operatorname{tg}x=a$ perrašome lygtį taip: $a+\frac{1}{a}=2$. Išsprendę gauname: $a=1$. Taigi $\operatorname{tg}x=1$ ir $x=\operatorname{arctg}1+n\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ $(n\in\boldsymbol{Z})$.

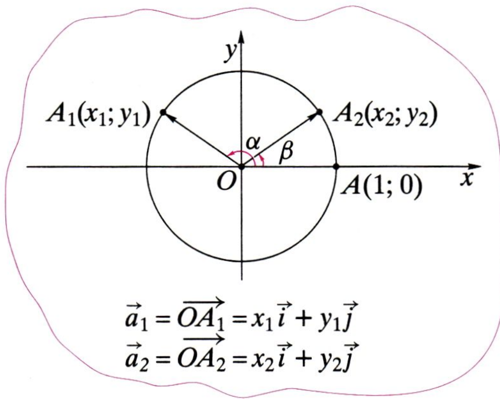
Kampų sumos ir skirtumo formulės

Išvesime formules, kuriomis naudojantis galima surasti $\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta)$, kai žinome $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$.

Panagrinėkime atvejį $0 < \beta < \alpha$ ir $\alpha - \beta < \pi$. Koordinačių plokštumoje nubrėžkime vienetinį apskritimą su centru koordinačių pradžioje, pažymėkime apskritimo ir Ox ašies susikirtimo tašką A. Tarkime, kad, pasukus spindulį OA atitinkamai kampais α ir β, taškas A pereina į taškus $A_1(x_1; y_1)$ ir $A_2(x_2; y_2)$. Tada $\sin\alpha = y_1, \cos\alpha =$ $= x_1, \sin\beta = y_2, \cos\beta = x_2$.

Pažymėkime du vienetinius vektorius $\vec{a_1} = \overrightarrow{OA_1}, \vec{a_2} = \overrightarrow{OA_2}$. Šiuos vektorius galime išreikšti vienetiniais Ox ir Oy ašių vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$\vec{a_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \qquad \vec{a_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$



Kampas tarp vektorių $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ lygus $\alpha - \beta$. Suskaičiuokime šių vektorių skaliarinę sandaugą:

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = |\vec{a_1}| \cdot |\vec{a_2}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Kita vertus, skaliarinę sandaugą galime išreikšti koordinatėmis: $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2$. Taigi

$$\cos(\alpha - \beta) = x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Šią formulę įrodėme, kai $0 < \beta < \alpha$ ir $\alpha - \beta < \pi$, tačiau ji teisinga su visomis α ir β reikšmėmis. Taigi visiems skaičiams a ir b teisinga lygybė

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \qquad (1)$$

Atitinkamai parinkę šioje formulėje a ir b reikšmes gausime dar keletą trigonometrinių formulių.

Jei $a = \alpha, b = -\beta$, tai $a - b = \alpha + \beta$, ir iš (1) formulės gauname

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Pasinaudoję redukcijos formule užrašykime:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right).$$

Dabar pasinaudoję (1) formule su $a = \frac{\pi}{2} - \alpha, b = \beta$ gauname dar vieną formulę:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

1 užduotis. Įrodykite formulę $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Trumpai gautąsias formules galima užrašyti taip:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Pasinaudosime šiomis formulėmis ir išreikšime $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ dydžiais $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta$. Kad jie būtų apibrėžti, tarsime, kad $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($n \in \boldsymbol{Z}, m \in \boldsymbol{Z}$). Tada $\cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0$. Pasinaudoję išvestomis formulėmis gauname

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Skaitiklį ir vardiklį padalysime iš sandaugos $\cos\alpha \cdot \cos\beta$:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Taigi gavome:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2 užduotis. Įrodykite formulę

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Dvigubo kampo formulės

Kai $\beta = \alpha$, tai $\cos(\alpha + \beta) = \cos(2\alpha)$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(2\alpha)$.

Pasinaudoję išvestomis formulėmis su $\beta = \alpha$ gauname dažnai naudojamas dvigubo kampo trigonometrinių funkcijų formules.

Visiems α teisingos lygybės:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Jei $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ ($n \in \boldsymbol{Z}$), tai

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Šios formulės dažnai praverčia sprendžiant lygtis.

3 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sin(2x) = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

Dešinę lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais pagal kvadratų skirtumo formulę:

$$\sin(2x) = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Pertvarkykime dešiniąją lygties pusę pasinaudoję formulėmis $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ir $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ($\alpha = \frac{x}{2}$). Pertvarkę gauname lygtį $\sin(2x) = \cos x \cdot 1$. Pakeitę $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ gausime:

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0, \qquad \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

Taigi $\cos x = 0$ arba $2\sin x - 1 = 0$.

Lygties $\cos x = 0$ sprendiniai užrašomi formule $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n \in \boldsymbol{Z}$). Spręsdami antrąją lygtį gauname: $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$ ($n \in \boldsymbol{Z}$). Taigi pradinės lygties sprendiniai užrašomi dviem formulėmis.

Žinodami kampo α trigonometrinių funkcijų reikšmes galime apskaičiuoti dvigubo kampo 2α trigonometrinių funkcijų reikšmes. Kartais tenka skaičiuoti ir pusės duotojo kampo trigonometrinių funkcijų reikšmes, t. y. žinant kampo α trigonometrinių funkcijų reikšmes, reikia apskaičiuoti kampo $\frac{\alpha}{2}$ trigonometrinių funkcijų reikšmes. Galima išvesti formules ir tokiam uždaviniui spręsti.

3 užduotis. Pasinaudoję lygybe $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, kurioje $x = \frac{\alpha}{2}$, įrodykite formules:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha, \qquad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha.$$

Pratimai ir uždaviniai

98. Užpildykite lentelę:

α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$
$\sin\alpha =$				$-\frac{1}{4}$
$\cos\alpha =$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\frac{1}{2}$			
$\operatorname{ctg}\alpha =$			$1\frac{2}{3}$	

99. Išspręskite lygtį:

a) $2\cos^2 x = 3\sin x$;
b) $2\sin^2 x = 3\cos x$;
c) $5\sin x - 4 + 2\cos^2 x = 0$;
d) $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$;
e) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$;
f) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$;
g) $2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
h) $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 3\cos(2\pi + x) = 4$.

100. Suprastinkite reiškinį:

a) $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;
b) $1 - \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;
c) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha$;
d) $(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) \cdot \sin^2\alpha$;
e) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
f) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)$.

101. Apskaičiuokite:

a) $\sin(\alpha+\beta)$ ir $\cos(\alpha+\beta)$, kai $\sin\alpha = 0{,}6$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ ir $\cos\beta = \frac{5}{13}$ $(0^\circ < \beta < 90^\circ)$;
b) $\sin(\alpha-\beta)$ ir $\cos(\alpha-\beta)$, kai $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$ ir $\sin\beta = \frac{12}{13}$ $(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi)$;
c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ir $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, kai $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ $(270^\circ < \alpha < 360^\circ)$ ir $\cos\beta = -0{,}8$ $(270^\circ < \beta < 360^\circ)$.

102. Raskite reiškinio reikšmę:

a) $\sin 45^\circ \cos 15^\circ + \cos 45^\circ \sin 15^\circ$;
b) $\sin 110^\circ \cos 50^\circ - \cos 110^\circ \sin 50^\circ$;
c) $\cos 61^\circ \cos 31^\circ + \sin 61^\circ \sin 31^\circ$;
d) $\cos 125^\circ \cos 80^\circ - \sin 125^\circ \sin 80^\circ$.

103. Įrodykite tapatybę:

a) $\frac{\sin\alpha\cos 3\alpha + \sin 3\alpha\cos\alpha}{\cos 6\alpha\cos 2\alpha + \sin 6\alpha\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(4\alpha)$;
b) $\frac{\sin 5\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha} = \operatorname{tg}(3\alpha)$;
c) $\frac{\cos 75^\circ\cos 15^\circ + \sin 75^\circ\sin 15^\circ}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$;
d) $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{\cos 10^\circ\cos 50^\circ - \sin 10^\circ\sin 50^\circ} = \sqrt{3}$;
e) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} = \sqrt{3}$;
f) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)} = 1$.

104. Išspręskite lygtį:

a) $\cos(5x) + \sin x \sin(4x) = 0$;
b) $\sin(6x) + \cos(2x)\sin(4x) = 0$;
c) $\sin(10x) - \cos(8x)\sin(2x) = 0$;
d) $\cos(2x) - \sin(7x)\sin(5x) = 0$.

105. Apskaičiuokite:

a) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;
b) $2\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ$;
c) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$;
d) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
e) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{8}}$;
f) $\mathrm{tg}\,22{,}5^\circ$.

106. Suprastinkite reiškinį:

a) $\frac{\cos(2\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;
b) $\frac{\sin(2\alpha)+\cos\alpha}{1+2\sin\alpha}$;
c) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$;
d) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha - 1} \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha)$.

107. Išspręskite lygtį:

a) $\sin^2(5x) - \cos^2(5x) = 0$;
b) $4\sin(4x)\cos(4x) - \sin(8x) = 0$;
c) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$;
d) $\cos(2x) + \sin^2 x = 1$;
e) $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = \cos x$.

108. Įrodykite tapatybę:

a) $4\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 20^\circ = \sin 40^\circ$;
b) $\cos 2^\circ + \sin^2 1^\circ = \cos^2 1^\circ$;
c) $\sin\alpha\cos^3\alpha - \cos\alpha\sin^3\alpha = \frac{1}{4}\sin(4\alpha)$;
d) $\cos 10\alpha - \cos^2(5\alpha) = -\sin^2(\pi - 5\alpha)$.

109. Išspręskite lygtį:

a) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$;
b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;
c) $\sin^2(2x) = \frac{3}{4}$;
d) $\cos^2(2x) = 0{,}75$.

110. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės yra lygios, kai:

a) $f(x) = \sin^4\frac{x}{2}$ ir $g(x) = \cos^4\frac{x}{2}$;
b) $f(x) = \cos(2x)$ ir $g(x) = \cos^2 x$;
c) $f(x) = \sin(2x)$ ir $g(x) = -\sin(4x)$;
d) $f(x) = \sqrt{3}\sin^2 x$ ir $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$?

111. Išspręskite lygtį:

a) $\cos(2x) + 5\sin(2x) = 5$;
b) $4\sin x + 3\cos x = 5$;
c) $1 - \cos(3x) = \left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right)^2$;
d) $(\sin 3x - \cos 3x)^2 = 1 + \cos(6x)$.

15.11. Dar daugiau trigonometrinių formulių

Išvesime dar keletą trigonometrinių formulių. Sudėję kairiąsias ir dešiniąsias lygybių

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned} \tag{1}$$

puses, gauname:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y.$$

Pažymėkime $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$. Tada $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ ir gautąją formulę galime parašyti taip:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Atėmę kairiąsias ir dešiniąsias (1) lygybių puses panašiai samprotaudami gauname

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Panašiai iš formulių

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

gautume formules, išreiškiančias sumas $\cos\alpha \pm \cos\beta$ sandaugomis.
Visiems α ir β teisingos formulės:

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Jeigu sandauga reikia pakeisti sinuso ir kosinuso sumą, tai iš pradžių galime pasinaudoti redukcijos formulėmis ir pakeisti sinusą kosinusu arba kosinusą sinusu. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} \sin(2x) + \cos(3x) = \sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) &= \\ = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)&. \end{aligned}$$

1 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį: a) $\cos(2x)+\cos(6x)=0$; b) $\sin(3x)=\cos(2x)$.

a) Pritaikę kosinusų sumos formulę lygtį $\cos(2x)+\cos(6x)=0$ pertvarkome taip:

$$2\cos\frac{2x+6x}{2}\cos\frac{2x-6x}{2}=0, \qquad 2\cos(4x)\cos(-2x)=0.$$

Kadangi $\cos x$ lyginė funkcija, tai gauname lygtį $2\cos(4x)\cos(2x)=0$.
Taigi vietoj pradinės lygties galime spręsti dvi paprastas lygtis:

$$\cos(4x)=0 \quad \text{ir} \quad \cos(2x)=0.$$

Pasinaudoję sprendinių formulėmis gauname $4x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ ir $2x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\boldsymbol{Z})$.
Taigi visi pradinės lygties sprendiniai užrašomi dviem formulėmis:

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n \quad \text{ir} \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

b) $\cos(2x)$ pakeisime sinusu pritaikę redukcijos formulę: $\cos(2x)=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)$.
Šitaip gauname lygtį $\sin(3x)-\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=0$.
Pritaikykime sinusų skirtumo formulę:

$$2\sin\frac{3x-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}\cos\frac{3x+\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}=0, \qquad 2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

Taigi dabar pakanka išspręsti tokias lygtis:

$$\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}=0 \quad \text{ir} \quad \cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

Spręsdami jas gauname: $\frac{5x-\frac{\pi}{2}}{2}=n\pi$ ir $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Taigi visi lygties $\sin(3x)=\cos(2x)$ sprendiniai užrašomi formulėmis

$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}n\pi, \qquad x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, \quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Užduotis. Kartais pravartu trigonometrinių funkcijų sandaugą pakeisti suma. Tai galima padaryti naudojantis formulėmis

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big),$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big),$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big).$$

Įrodykite šias formules.

2 PAVYZDYS. Išspręskime lygtį $\sin(2x)\cos(4x) = \sin x \cos(5x)$.
Pakeisdami abiejose lygties pusėse sandaugas sumomis gausime

$$\frac{1}{2}\big(\sin(6x) + \sin(-2x)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin(6x) + \sin(-4x)\big).$$

Padauginę abi puses iš dviejų ir perkėlę visus narius į vieną pusę gausime lygtį

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 0.$$

Dabar pasinaudoję viena iš formulių išskaidysime kairiąją lygties pusę sandauga:

$$2\cos(3x)\sin x = 0.$$

Šios lygties sprendinius gausime išsprendę lygtis

$$\cos(3x) = 0 \quad \text{ir} \quad \sin x = 0.$$

Gaunasme dvi formules, kuriomis užrašomi visi pradinės lygties sprendiniai:

$$x = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3}, \qquad x = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Pratimai ir uždaviniai

112. Išreikškite sandauga:

a) $\sin 40^\circ + \sin 60^\circ$;
b) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{8}$;
c) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha$;
d) $\sin\alpha - \sin(\alpha + 30^\circ)$;
e) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$;
f) $\cos(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$.

113. Įrodykite tapatybę:
a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; b) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

114. Išreikškite sandauga pasinaudoję 113 pratimo tapatybėmis:
a) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ$; b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

115. Įrodykite tapatybę:

a) $\frac{\sin\alpha+\sin(5\alpha)}{\cos(2\alpha)+\cos(6\alpha)} = \operatorname{tg}(4\alpha)$;
b) $\frac{\sin\alpha+\sin(5\alpha)}{\cos\alpha+\cos(6\alpha)} = \operatorname{tg}(3\alpha)$;
c) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ - \cos 10^\circ = 0$;
d) $\cos 35^\circ - \cos 25^\circ + \cos 85^\circ = 0$.

116. Apskaičiuokite be skaičiuoklio:
a) $\cos\frac{\pi}{8}$; b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; c) $\sin\frac{13\pi}{12}$; d) $\cos\frac{\pi}{18}$; e) $\sin\frac{17\pi}{12}$; f) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$.

117. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinių reikšmės yra lygios nuliui?

a) $\cos(2x) + \cos(6x)$;

b) $\sin(3x) - \sin x$;

c) $\cos(3x)\cos(4x) - \cos(7x)$;

d) $\cos(2x)\cos(3x) - \cos(5x)$.

118. Išspręskite lygtį:

a) $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$;

b) $\cos(45^\circ + x) - \cos(15^\circ + x) = 1$;

c) $\sin(2x) + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos(3x)$;

d) $\sin(3x) - \sin(7x) = \sqrt{3}\sin(2x)$.

119. Įrodykite lygybę:

a) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ = 0$;

b) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

120. Pakeiskite sandauga:

a) $\sin\alpha + \cos(2\alpha) + \sin(3\alpha) + \cos(4\alpha)$;

b) $\cos\beta + \sin(2\beta) + \cos(3\beta) + \sin(4\beta)$.

121. Raskite lygties sprendinius, priklausančius intervalui $[-2\pi; 2\pi]$:

a) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$;

b) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$;

c) $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \cos^2(4x) - 2 = 0$;

d) $\sin^2 x + \sin^2(2x) - \sin^2(3x) - \sin^2(4x) = 0$.

122. Apskaičiuokite:

a) $\sin 7^\circ 30' \cdot \cos 37^\circ 30'$;

b) $\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$;

c) $\cos 7^\circ 30' \cdot \sin 52^\circ 30'$;

d) $\cos 67^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$.

123. Sandaugą pakeiskite suma:

a) $2\cos\alpha\sin(3\alpha)\sin(2\alpha)$;

b) $4\sin\alpha\cos(3\alpha)\cos(5\alpha)$;

c) $2\sin\alpha\sin(2\alpha)\sin(3\alpha)$;

d) $4\cos\alpha\cos(2\alpha)\cos(3\alpha)$.

124. Išspręskite lygtį:

a) $\cos x\cos(3x) = -\frac{1}{2}$;

b) $\sin x\sin(3x) = \frac{1}{2}$;

c) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}\sin x$;

d) $\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

125. Įrodykite tapatybę:

a) $8\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 20^\circ = 1$;

b) $8\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \sin 10^\circ = 1$.

16. Kartojimo uždaviniai

1. Išreikškite laipsniais:
$\frac{2}{5}\pi$; $\frac{4}{9}\pi$; $\frac{10}{27}\pi$; $3\frac{4}{5}\pi$.

2. Išreikškite radianais:
$12°$; $-120°$; $400°$; $-355{,}5°$.

3. Skritulio spindulys lygus 50 cm. Raskite skritulio išpjovos lanko ilgį ir plotą, kai ją atitinkantis centrinis kampas lygus:

a) $45°$; b) $120°$; c) $\frac{2}{5}\pi$; d) $\frac{3}{8}$.

4. Trikampio du kampai lygūs $52°$ ir $59°$. Raskite trečio kampo didumą radianais.

5. Trikampio du kampai lygūs $\frac{2\pi}{15}$ ir $\frac{3\pi}{10}$ radiano. Raskite trečio kampo didumą laipsniais.

6. Užpildykite lentelę:

Apskritimo spindulys	6 cm	8 cm	24 cm		2,4 m	
Lanko didumas	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$15°$	$10°$		$\frac{7\pi}{12}$
Lanko ilgis				22 dm	4,1 m	10 m

7. Raskite kampo α, kurį sudaro vektorius $\overrightarrow{OA}$ su koordinačių ašimi Ox, trigonometrinių funkcijų reikšmes, kai taško A koordinatės yra:

a) $(1; 2)$; b) $(\sqrt{2}; 1)$; c) $(-3; 3)$; d) $(-6; -12)$.

8. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

a) $\sin(3\alpha) + \cos(2\alpha) - \operatorname{tg}\alpha$, kai $\alpha = 30°; 45°; -180°$;

b) $\cos(3\alpha) + \sin(2\alpha) + \operatorname{ctg}(2\alpha)$, kai $\alpha = 30°; -45°; 60°$.

9. Apskaičiuokite:

a) $\cos 1485°$; $\cos\frac{23\pi}{6}$; $\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$; $\sin 810°$; $\sin\frac{35\pi}{6}$; $\sin\frac{7\pi}{2}$;

b) $\sqrt{3}\sin 420°$; $\sqrt{3}\cos 390°$; $\operatorname{tg} 945°$.

10. Įrodykite lygybę:

a) $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos^2(270°-\alpha)}{\cos(360°+\alpha)} = \sin(\alpha + 90°)$;

b) $\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos\alpha\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)}{\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)} = \sin\alpha$.

11. Apskaičiuokite:

a) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right)$;
b) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right)$;
c) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
d) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
e) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) + \arccos\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
f) $\operatorname{tg}(\arcsin 0) - \operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;
g) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}(\arcsin 0)$.

12. Išdėstykite didėjimo tvarka:

a) $\sin 0°$; $\sin(-45°)$; $\sin 60°$; $\sin 85°$; $\sin 10°$;
b) $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{11\pi}{8}$; $\cos\frac{9\pi}{4}$; $\cos\frac{13\pi}{8}$; $\cos\frac{7\pi}{8}$.

13. Raskite reiškinio reikšmę:

a) $\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{11}{3}\pi\right)$;
b) $\cos\left(4\frac{1}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{13}{6}\pi\right)$;
c) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6}$;
d) $5\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{4\pi}{3}$.

14. Nustatykite reiškinio ženklą:

a) $\sin 190° \cdot \cos(-190°) \cdot \operatorname{tg} 60°$;
b) $\cos 120° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{ctg} 30°$;
c) $\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$;
d) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \cdot \cos\left(-\frac{12}{13}\pi\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

15. Palyginkite šių reiškinių reikšmes:

a) $\sin 30° - \sin 35°$ ir $\cos 30° - \cos 35°$;
b) $\operatorname{tg} 50° - \operatorname{tg} 10°$ ir $\operatorname{ctg} 50° - \operatorname{ctg} 10°$.

16. Grafiškai nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis:

a) $\sin x = x$;
b) $\cos x = \frac{x}{2}$;
c) $\operatorname{tg} x = x^2$;
d) $\sin x = -x + 1$.

17. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė:

a) $\cos x = \sqrt{3}\sin x$;
b) $3\cos x = \sqrt{3}\sin x$;
c) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 2\cos^2 x$;
d) $3\sin^2 x + \sin x\cos x = 2\cos^2 x$?

18. Išspręskite lygtį:

a) $\sin(3x)\cos(3x) + \cos^2(3x) = 0$;
b) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 0$;
c) $4\sin^2\left(\frac{1}{4}x\right) - 5\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{4}x\right) - 6\cos^2\left(\frac{1}{4}x\right) = 0$;
d) $3\sin^2(10x) - 7\sin(10x)\cos(10x) + 2\cos^2(10x) = 0$;
e) $\sin^2(5x) + 2\sin(5x)\cos(5x) - 3\cos^2(5x) = 0$.

19. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė:

a) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 1$; b) $2\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 2$;

c) $2\sin^2 x\cos^2 x = \sqrt{6}\sin x\cos x$; d) $6\sin^2 x + 7\sin x\cos x = 4$?

20. Nustatykite lygties apibrėžimo sritį ir raskite lygties sprendinius:

a) $\cos x\operatorname{tg} x = 0$; b) $\sin x\operatorname{ctg} x = 0$;

c) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = 0$; d) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos x} = 0$;

e) $\sin x\operatorname{ctg} x = \sin^2 x + \cos^2 x$; f) $\cos x\operatorname{tg} x = \sin^2 x + \cos^2 x$;

g) $(1 - \sin x)\operatorname{tg} x = 0$; h) $(1 + \cos x)\operatorname{ctg} x = 0$.

21. Raskite reiškinio reikšmę, kai $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ir $0° < \alpha < 90°$:
a) $\cos(180° + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha$; b) $\operatorname{ctg}\alpha + \cos(180° - \alpha)$.

22. Raskite reiškinio reikšmę, kai $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ ir $90° < \alpha < 180°$:
a) $\sin(180° + \alpha) + \operatorname{tg}\alpha$; b) $\sin(180° - \alpha) - \operatorname{ctg}\alpha$.

23. Išspręskite lygtį:
a) $2\cos^2(4\pi - x) - \sin\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = 1$;
b) $5\sin^2(90° - x) + 8\cos(180° + x) = 0$;
c) $6\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(2\pi + x) = 1$;
d) $\sin(180° + x) + 2\cos^2(180° - x) = -1$.

24. Suprastinkite reiškinį:
a) $2\sin(7\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(5\alpha)$; b) $2\cos(4\alpha)\cos(2\alpha) - \cos(6\alpha)$.

25. Apskaičiuokite:
a) $2\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}$; b) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \cos^4\frac{\pi}{8}$.

26. Apskaičiuokite:
a) $\sin(4\pi + 2\alpha)$, kai $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, kai $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$.

27. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų abscises, jei:
a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin(2x)$;
b) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, $g(x) = \sin(2x)$;
c) $f(x) = 5\sin^2(2x)$, $g(x) = 2 - \cos^2(2x)$;
d) $f(x) = 2\operatorname{tg}^2 x$, $g(x) = \operatorname{tg} x + 3$.

28. Raskite lygties mažiausią teigiamą sprendinį:

a) $(\cos x - 3)\cdot\left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; b) $(\cos(2x) - 2)\cdot\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$;

c) $(\sin(3x) - 3)\cdot\left(\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; d) $(\cos(2x) + 1)\cdot\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

29. Raskite lygties sprendinius nurodytuose intervaluose:

a) $\cos(4x) - \frac{1}{2} = 0$, kai $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin(2x) - \frac{1}{2} = 0$, kai $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

c) $1 + \sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{4} = 0$, kai $1 \leqslant x \leqslant 5$;

d) $1 - \sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{4} = 0$, kai $-1 < x < 4$.

30. Suprastinkite:

a) $2\sin(4\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(6\alpha)$; b) $\sin(6\alpha) - 2\sin(9\alpha)\cos(3\alpha)$;

c) $\sin(4\alpha) - 2\sin(7\alpha)\cos(3\alpha)$; d) $\cos(8\alpha) - 2\sin(10\alpha)\sin(2\alpha)$.

31. Reiškinį pakeiskite sandauga:

a) $\frac{1}{2} + \sin\alpha$; b) $\frac{1}{2} - \cos\alpha$; c) $1 - \sin\frac{\alpha}{3}$;

d) $1 + \cos\frac{\alpha}{3}$; e) $1 + 2\cos\alpha$; f) $1 - 2\sin\alpha$.

32. Įrodykite tapatybę:

a) $\frac{\sin(4\alpha)-\sin(2\alpha)}{\cos(4\alpha)+\cos(2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$; b) $\frac{\cos(3\alpha)-\cos(7\alpha)}{\sin(7\alpha)+\sin(3\alpha)} = \operatorname{tg}(2\alpha)$;

c) $\frac{\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)+\sin(6\alpha)}{4\cos\alpha\cos(2\alpha)} = \sin(3\alpha)$; d) $\frac{\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)-\sin(6\alpha)}{4\sin\alpha\sin(2\alpha)} = \sin(3\alpha)$.

33. Išspręskite lygtį:

a) $\sin(2x) - \sin(5x) = 0$; b) $\cos(5x) + \cos(2x) = 0$;

c) $\cos(3x) - \cos(2x) = \sin x$; d) $\cos x - \sin(3x) = \cos(2x)$.

Geometrijos uždaviniai

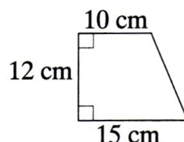
34. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ smailusis kampas lygus 30°, o mažesnysis pagrindas BC lygus a. Nubrėžus trapecijos aukštines BE ir CF gaunamas kvadratas $BCFE$. Raskite trapecijos vidurinę liniją ir plotą.

35. Lygiašonės trapecijos vienas kampas lygus 60°, šoninė kraštinė lygi 18 cm, o pagrindų ilgių suma lygi 34 cm. Raskite trapecijos pagrindus ir plotą.

36. Stačiąją trapeciją įstrižainė dalija į du trikampius — lygiakraštį, kurio kraštinė lygi 4 cm, ir statųjį. Apskaičiuokite trapecijos vidurinę liniją.

37. Keturkampio kraštinės lygios 12 cm, 15 cm, 6 cm ir 28 cm. Raskite panašaus į jį keturkampio kraštines, jei yra žinoma, kad jo ilgiausioji kraštinė lygi 42 cm.

38. Paveiksle pateiktas sklypo planas, nubraižytas masteliu 1 : 1000. Apskaičiuokite sklypo plotą.



39. Duotojo daugiakampio plotas lygus $9\,\text{dm}^2$. Apskaičiuokite panašaus į jį daugiakampio plotą, jei duotojo daugiakampio kraštinę, lygią $2\,\text{dm}$, atitinka kito daugiakampio kraštinė, lygi $3\,\text{dm}$.

40. Kaip išdėstyti vienas kito atžvilgiu vietos vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, jei:

a) vektorių abscisės lygios, o ordinatės yra priešingų ženklų ir lygių absoliutinių didumų;

b) vektorių atitinkamos koordinatės yra priešingieji skaičiai;

c) vektorių abscisės yra priešingieji skaičiai, o ordinatės lygios?

41. Pavaizduokite koordinačių plokštumoje vietos vektorius:

a) $\vec{a}(-1; 3)$, $\vec{b}(2; -1)$;
b) $\vec{m}(0; -4)$, $\vec{n}(-3; -2)$;
c) $\vec{c}(5; 0)$, $\vec{d}(1; 1)$;
d) $\vec{e} = 4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{f} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

42. Vektorius $\overrightarrow{OA}$ su ašimi Ox sudaro kampą α, o jo ilgis lygus a. Raskite vektoriaus $\vec{a}$ koordinates, jei:

a) $\alpha = 0°$, $a = 2$;
b) $\alpha = 30°$, $a = 4$;
c) $\alpha = 45°$, $a = 3\sqrt{2}$;
d) $\alpha = -60°$, $a = 6$;
e) $\alpha = 90°$, $a = 5{,}5$;
f) $\alpha = -120°$, $a = 10$.

43. Raskite x ir y, kai $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ koordinačių ašių vienetiniai vektoriai:

a) $2\vec{i} + 7\vec{j} = (x - 1)\vec{i} + (2y + 1)\vec{j}$;
b) $(x - y + 1)\vec{i} + (x + y)\vec{j} = \vec{0}$;
c) $(x - 2)\vec{i} - (y - 1)\vec{j} = -x\vec{i} + 2y\vec{j}$;
d) $(3x - 2y - 1)\vec{i} = (x - 2y + 9)\vec{j}$.

44. Duoti vektoriai $\vec{m}(1; -2)$, $\vec{n}(-3; 5)$, $\vec{p}(4; 0)$. Raskite koordinates vektoriaus:
a) $-2\vec{m} - \vec{n} + 3\vec{p}$; b) $4\vec{m} - 1{,}5\vec{n}$; c) $5\vec{n} + 2{,}5\vec{p}$; d) $6(\vec{n} - 4\vec{p})$.

45. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates ir ilgį, kai žinomos taškų A ir B koordinatės.

a) $A(5; 4)$, $B(-2; 0)$;
b) $A(-3; 1{,}5)$, $B(0; -3{,}5)$;
c) $A(-1; -1)$, $B(-3{,}4; -10)$;
d) $A(0; -7)$, $B\left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

46. Nuo taško M atidėtas vektorius $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Raskite taško N koordinates, kai:

a) $M(3; 0)$, $\vec{a}(-3; 2{,}6)$;
b) $M(-2; 8)$, $\vec{a}(9; -6)$;
c) $M(-2; -7)$, $\vec{a}(2; 6)$;
d) $M(0; 0)$, $\vec{a}(3{,}3; -5{,}5)$.

47. Raskite atkarpos AB vidurio taško M koordinates, jei $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Nurodymas. Pasinaudokite lygybe $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, čia O — koordinačių plokštumos pradžios taškas.

Įvairūs uždaviniai

48. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = x^2 - 2ax$ intervale $[0; 3]$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią -4?

49. Iš parduotuvės pirmojo aukšto į antrąjį galima pasikelti eskalatoriumi. Linas, bėgdamas šiuo eskalatoriumi į viršų, suskaičiavo 30 laiptelių, o tuo pačiu greičiu bėgdamas žemyn — 150 laiptelių. Kiek laiptelių suskaičiuotų Linas, jeigu eskalatorius būtų išjungtas?

50. Išspręskite lygčių sistemą:
$$\begin{cases} 4|y| + 7x = -12, \\ 6|x| + 8 = |x|y + 4y. \end{cases}$$

51. Raskite sandaugą xyz, kai
$$\begin{cases} xy = 9z, \\ xz = 4y, \\ yz = 16x. \end{cases}$$

52. Įrodykite, kad $x - 2y \leqslant 200$, kai $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$.

53. Kokia kvadratinė lygtis turi sprendinius $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ir $\sqrt{3} - \sqrt{2}$?

54. Išspręskite nelygybę $a(3 - x) \geqslant 3x + a$.

55. Tėvas vyresnis už sūnų 8 kartus, o po 10 metų jis bus vyresnis už sūnų 3 kartus. Kiek tėvui metų?

56. Funkcija apibrėžta formule
$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} + x + \sqrt{x^2 + 1}.$$
Raskite $f(2002)$.

57. Išspręskite lygtį:

a) $3^{\lg x} + 3^{1 - \lg x} = 4$;

b) $x \lg 2 + \lg(2^x - 2) = 1 + 3 \lg 2$.

58. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ \log_5(y - x) = \log_5(x + 2); \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 272, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$

59. Išspręskite nelygybę:

a) $(x - 2) \log_3 x > 0$;

b) $3^{\log_4 \frac{2x-1}{x-2}} > \sqrt{3}$.

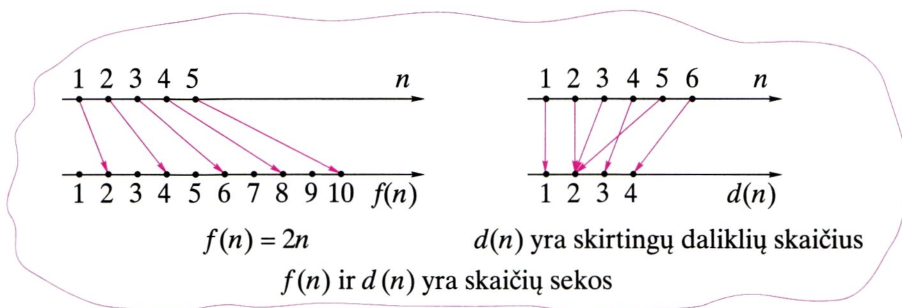
17. Skaičių sekos

17.1. Skaičių sekos ir jų reiškimo būdai

Funkcija yra taisyklė, priskirianti nepriklausomojo kintamojo reikšmėms priklausomojo kintamojo reikšmes. Nagrinėjome daug funkcijų, apibrėžtų visoje skaičių tiesėje arba jos intervaluose. Dabar panagrinėsime funkcijas, apibrėžtas tik natūraliųjų skaičių aibėje.

APIBRĖŽIMAS
Funkciją $f(n)$, apibrėžtą natūraliųjų skaičių aibėje, vadiname skaičių seka.

Pavyzdžiui, funkcija $f(n) = 2n$, priskirianti natūraliajam skaičiui n dvigubai didesnį už jį skaičių, yra skaičių seka.
Funkcija $d(n)$, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje ir skaičiui n priskirianti jo skirtingų natūraliųjų daliklių skaičių — taip pat yra skaičių seka.



Funkcijos dažniausiai apibrėžiamos formulėmis, kartais jos tiesiog nusakomos žodžiais. Šitaip galima apibrėžti ir skaičių sekas. Pavyzdžiui, lyginių natūraliųjų skaičių seką apibrėžėme formule $f(n) = 2n$, o daliklių skaičiaus seką $d(n)$ nusakėme žodžiais.
Tegu dabar $a(n)$ kokia nors skaičių seka. Surašykime $a(n)$ reikšmes, kai $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$,..., į vieną eilę:

$$a(1), a(2), a(3), \ldots$$

Skaičių $a(1)$ vadiname šios sekos pirmuoju, $a(2)$ — antruoju, ..., $a(n)$ — n-uoju nariu. Paprastai surašant sekos narius į vieną eilę vietoj $a(1)$ rašoma a_1, vietoj $a(2)$ — a_2, vietoj $a(n)$ — a_n. Taigi sekos narius, surašytus į vieną eilę, žymime taip:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots,$$

o pačią seką žymime (a_n). Žinoma, sekos gali būti žymimos ir kitomis raidėmis.

Apibrėžti seką reiškia nurodyti, kaip surasti n-ąjį sekos narį a_n. Kartais galima užrašyti šį narį formule.

1 PAVYZDYS. Sekos (a_n) n-asis narys užrašomas formule $a_n = 2n$. Imdami $n = 1$, $n = 2$ ir t. t. gauname visus lyginius skaičius

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots$$

Nelyginių skaičių sekos (b_n) sekos n-asis narys užrašomas formule $b_n = 2n - 1$. Skaičių, kurie yra natūraliųjų skaičių kvadratai, sekos (c_n) n-ojo nario formulė: $c_n = n^2$ ir t. t.

Formulė, išreiškianti sekos narį a_n jo eilės numeriu, vadinama sekos (a_n) bendrojo nario formule.

Kartais bendrojo nario formulė yra sudėtinga, arba jos iš viso negalima užrašyti, tačiau seką apibrėžti žodžiais visai paprasta.

2 PAVYZDYS. Sekos (d_n) n-asis narys d_n lygus skirtingų n natūraliųjų daliklių skaičiui. Jeigu tik mokame dalyti vienus skaičius iš kitų, galėsime vieną po kito rašyti šios sekos narius:

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 2, \quad 4, \quad 2, \quad \ldots.$$

1 užduotis. Užrašykite 31-ąjį, 32-ąjį ir 33-iąjį 2 pavyzdyje apibrėžtos sekos (d_n) narius.

3 PAVYZDYS. Sekos (p_n) n-asis narys p_n lygus n-ajam iš eilės pirminiam skaičiui. Primename, kad pirminiais skaičiais vadiname tuos natūraliuosius skaičius, kurie turi tik du skirtingus daliklius. Taigi sekos (p_n) nariai yra tokie:

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad \ldots$$

2 užduotis. Raskite dvyliktąjį ir tryliktąjį pirminių skaičių sekos (p_n) narius.

Nors abi užduotys panašios, tačiau atliekant jas išryškėja vienas skirtumas. Pirmoje užduotyje galėjote iš karto skaičiuoti reikiamus narius, o antroje — pirmiausia teko surasti visus narius su mažesniais numeriais.

Kartais seka apibrėžiama užrašant vieną ar kelis pirmuosius sekos narius bei nurodant formulę, kuri išreiškia n-ąjį narį per sekos narius su mažesniais numeriais. Tokia formulė vadinama *rekurentine*, t. y. grįžtamąja, nes norint apskaičiuoti narį a_n reikia sugrįžti prie jau apskaičiuotų narių.

4 PAVYZDYS. Fibonačio skaičių seka apibrėžiama taip:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad (n \geqslant 3).$$

Taigi naudodamiesi rekurentine formule galime skaičiuoti:

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$$
$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8,$$
$$a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13$$

ir t. t.

3 užduotis. Raskite Fibonačio skaičių sekos (a_n) narius a_{10}, a_{11}.

Ta pati seka gali būti apibrėžta keliais būdais. Pavyzdžiui, nelyginių skaičių seką galime apibrėžti bendrojo nario formule $a_n = 2n - 1$ arba rekurentiškai: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ $(n \geqslant 2)$.

4 užduotis. Užrašykite skaičių sekos

$$5, \quad -5, \quad 5, \quad -5, \quad 5, \quad \ldots$$

bendrojo nario formulę. Apibrėžkite šią seką rekurentiškai.

Kiekviena skaičių seka turi be galo daug narių. Visų jų niekada nesurašytume. Todėl užrašę kelis narius dedame daugtaškį, tuo pažymėdami, kad skaičių eilė tęsiasi. Kartais nagrinėjame tik baigtines skaičių eiles. Pavyzdžiui, surašę skaičiaus 12 skirtingus daliklius į eilę gauname

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 12.$$

Tokias baigtines skaičių eiles vadiname *baigtinėmis skaičių sekomis*. Taigi užrašėme baigtinę seką, kurią sudaro šeši nariai: skaičius 1 yra pirmasis, skaičius 2 — antrasis šios sekos narys ir t. t.

Baigtinės sekos narius taip pat žymėsime raidėmis su indeksais. Pavyzdžiui, baigtinę seką, turinčią k narių, galime užrašyti taip:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k.$$

Tokią seką galime įsivaizduoti kaip funkciją, kurios apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių poaibis $\{1, 2, \ldots, k\}$. Ši funkcija skaičiui 1 priskiria reikšmę a_1, skaičiui 2 — reikšmę a_2 ir t. t.

Pratimai ir uždaviniai

126. Seką (a_n) sudaro natūraliųjų skaičių kvadratai, surašyti didėjimo tvarka. Parašykite pirmuosius šešis jos narius. Raskite: a_{10}, a_{20}, a_{40}, a_{100}, a_n.

127. Raskite sekos pirmuosius penkis narius:

a) $a_n = -n$; b) $a_n = \sqrt{n}$; c) $c_n = -3$;

d) $d_n = (-2)^n$; e) $e_n = \frac{n}{n+1}$; f) $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

128. Raskite a_1, a_5, a_{10}, a_{n+1}, jei:
a) $a_n = 4n - 5$; b) $a_n = \frac{n}{5} + 1$; c) $a_n = n^2 - 4$; d) $a_n = 8 - 3n$.

129. Seka apibrėžta formule $x_n = 5 - 2n$. Raskite numerį sekos nario, kuris lygus:
a) -15; b) -45; c) -197; d) -995.

130. Parašykite pirmuosius penkis sekos (b_n) narius, kai:

a) $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n - 4$; b) $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$;

c) $b_1 = 10$, $a_2 = -5$, $b_{n+2} = \frac{b_n}{b_{n+1}}$; d) $b_1 = 10$, $b_2 = -5$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}}$.

131. Užrašykite bendrojo nario formulę kiekvienai iš šių sekų:

a) 1, 10, 100, 1000, …; b) 1, −4, 9, −25, …;

c) 4, −4, 4, −4, 4, …; d) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, … .

132. Raskite pirmuosius dešimt sekos narių ir pažymėkite juos koordinačių plokštumoje taškais, kurių abscisės lygios narių eilės numeriams, o ordinatės — sekos narių reikšmėms:

a) $a_n = \frac{1}{2}n$; b) $a_n = 2 - 3n$;

c) $a_n = (-1)^n \cdot 2$; d) $a_n = (-3)^n$.

133. Apskaičiuokite antrąjį, trečiąjį, ketvirtąjį ir penktąjį sekos (x_n) narį, žinodami, kad:
a) pirmasis narys lygus 100, o kiekvienas narys, pradedant antruoju, yra perpus mažesnis už prieš jį einantį;
b) pirmasis narys lygus −20, o kiekvienas narys, pradedant antruoju, yra 3 vienetais didesnis už prieš jį einantį.

134. Kiekvienas sekos narys lygus trigubam jo numeriui, sumažintam vienetu. Raskite tos sekos pirmąjį, dešimtąjį, penkioliktąjį narius. Ar skaičiai 30; 34; 154; 254; 500 yra tos sekos nariai?

135. Kurie sekų $y_n = 5n - 3$ ir $x_n = -2n - 13$ nariai tenkina sąlygas:
$y_n < 20$ ir $x_n < -20$?

136. Kurie sekos nariai tenkina nurodytą sąlygą:
a) $y_n = -5n + 1$, $-25 < y_n < -4$; b) $y_n = -3n - 11$, $-50 < y_n < -30$?

17.2. Didėjančios ir mažėjančios skaičių sekos

Jei didesnę argumento reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė, tai funkciją vadiname didėjančia; jei didesnę argumento reikšmę atitinka mažesnė funkcijos reikšmė, tai funkciją vadiname mažėjančia. Panašiai apibrėšime didėjančias ir mažėjančias skaičių sekas.

APIBRĖŽIMAS

Skaičių seką (a_n), kurios kiekvienas narys yra didesnis už prieš jį einantį, t. y. $a_{n+1} > a_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$, vadiname didėjančia.

Skaičių seką (a_n), kurios kiekvienas narys yra mažesnis už prieš jį einantį, t. y. $a_{n+1} < a_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$, vadiname mažėjančia.

Didėjančias ir mažėjančias sekas vadiname monotoninėmis.

Jei $a_{n+1} - a_n > 0$ $(n \geqslant 1)$, tai seka (a_n) yra didėjanti. Jei $a_{n+1} - a_n < 0$ $(n \geqslant 1)$, tai seka (a_n) yra mažėjanti.

1 PAVYZDYS. a) Seka $a_n = 2n$ yra didėjanti, nes

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2,$$

taigi

$$a_{n+1} - a_n > 0, \quad n \geqslant 1.$$

b) Seka $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ taip pat yra didėjanti, nes

$$b_{n+1} - b_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \quad n \geqslant 1.$$

1 užduotis. Įsitikinkite, kad sekos $c_n = 1 - 2n$, $d_n = \frac{n+1}{n}$ yra mažėjančios.

Dažnai seka nėra nei didėjanti, nei mažėjanti. Pavyzdžiui, sekos

$$a_n = (-1)^n, \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

nėra nei didėjančios, nei mažėjančios. Iš tikrųjų, pavyzdžiui, sekos (a_n) nariai pakaitomis lygūs tai 1, tai -1:

$$-1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots,$$

taigi $a_1 < a_2$, tačiau $a_2 > a_3$ ir t. t.

2 užduotis. Įsitikinkite, kad seka $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ nėra nei didėjanti, nei mažėjanti.

Panagrinėkime dvi didėjančias sekas (a_n) ir (b_n):

$$a_n = 2n, \qquad b_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Užrašykime keletą šių sekų narių:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots \quad \text{ir} \quad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Jeigu imsime dideles n reikšmes, sekos (a_n) nariai irgi bus dideli. Pavyzdžiui, kai $n > 500$, tai $a_n > 1000$. Nors seka (b_n) taip pat didėjanti, kad ir kokius didelius skaičius n imtume, sekos b_n nariai vis tiek bus mažesni už 1: $b_n < 1$.

Be to, kai n reikšmės yra didelės, sekos (b_n) nariai vis mažiau skiriasi nuo 1. Raskime, pavyzdžiui, su kokiais n skirtumas tarp 1 ir b_n yra mažesnis už 0,001, t. y. kada $|1 - b_n| < 0{,}001$. Kadangi $b_n < 1$, tai $1 - b_n > 0$. Pakanka nustatyti, kada teisinga nelygybė $1 - b_n < 0{,}001$. Spręsdami gauname:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0{,}001, \qquad \frac{1}{n} < 0{,}001, \qquad n > 1000.$$

Taigi visi sekos nariai $a_{1001}, a_{1002}, a_{1003}, \ldots$ skiriasi nuo 1 mažiau kaip viena tūkstantąja. Jeigu vietoj 0,001 imtume mažesnį skaičių, pavyzdžiui, 10^{-6}, ir vėl gautume, kad visi nariai su numeriais, didesniais už tam tikrą skaičių, skiriasi nuo 1 mažiau kaip 10^{-6}.

Sakome, kad sekos (b_n) nariai *artėja* prie 1, o šis skaičius yra sekos (b_n) *riba*. Simboliškai rašome:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 1.$$

Lotyniškai *limes* reiškia sieną arba tiesiog ribą. Todėl užrašą $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1$ skaitome taip: limes b_n, kai n artėja prie begalybės, lygi 1. Arba lietuviškai: sekos b_n riba, kai n artėja prie begalybės, lygi 1.

2 PAVYZDYS. Įsitikinkime, kad sekos $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ riba lygi 0.
Iš tikrųjų

$$|b_n - 0| = \frac{1}{n} < 0{,}1, \quad \text{kai } n > 10;$$

$$|b_n - 0| = \frac{1}{n} < 0{,}01, \quad \text{kai } n > 100;$$

$$|b_n - 0| = \frac{1}{n} < 0{,}001, \quad \text{kai } n > 1000 \text{ ir t. t.}$$

Taigi sekos (b_n) nariai, didėjant n, artėja prie nulio:

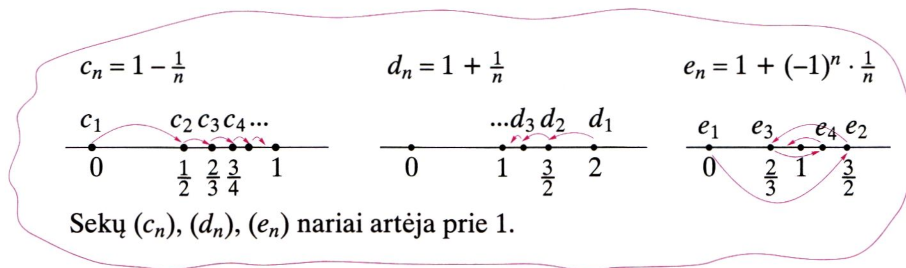
$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

3 užduotis. Panagrinėkite seką $c_n = 1 - \frac{2}{n}$. Suraskite, su kokiais numeriais n šios sekos nariai skiriasi nuo 1 mažiau kaip 0,0001; mažiau kaip 0,00003.

Panagrinėję sekas $c_n = 1 - \frac{1}{n}$, $d_n = 1 + \frac{1}{n}$, $e_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ įsitikintume, kad jų nariai artėja prie 1. Taigi

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} d_n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} e_n = 1.$$

Atidėkime po kelis šių sekų narius skaičių tiesėse.



Sekų (c_n), (d_n), (e_n) nariai artėja prie 1.

Brėžiniuose matome, kad nors visų trijų sekų riba ta pati, bet sekų nariai artėja prie jos skirtingai. Įsižiūrėkime į brėžinį ir įsivaizduokime, kaip šis artėjimas vyksta toliau: taškai, vaizduojantys sekų narius, vis labiau ir labiau priartėja prie vieneto taško, tačiau niekada su juo nesutampa.

Taigi sekos ribą galime įsivaizduoti kaip skaičių, ties kuriuo „kaupiasi“ sekos nariai. Tikslus sekos ribos apibrėžimas formuluojamas taip.

APIBRĖŽIMAS
Sakysime, kad skaičius a yra sekos (a_n) riba, jeigu, pradedant nuo tam tikro nario, kurio numerį pažymėsime n_1, visi sekos nariai tenkina nelygybę $|a - a_n| < 0{,}1$ $(n \geqslant n_1)$; pradedant nuo tam tikro nario su numeriu n_2, visi sekos nariai tenkina nelygybę $|a - a_n| < 0{,}01$ $(n \geqslant n_2)$ ir t. t. — kad ir koks didelis būtų skaičius m, pradedant nuo tam tikro nario su numeriu n_m, visi sekos nariai tenkina nelygybę $|a - a_n| < 10^{-m}$ $(n \geqslant n_m)$. Skaičių a vadiname sekos (a_n) riba ir rašome

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

4 užduotis. Panagrinėkite sekas

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{2^n}, \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

ir pasakykite, kam lygios jų ribos.

17.3. Aritmetinė progresija

Tarkime, pirmąkart atsivertę vadovėlį perskaitėme tik pirmąjį puslapį, kuriame išdėstytas turinys, o vėliau — kasdien skaitėme po 5 puslapius. Jei baigę skaityti kasdien užsirašytume paskutinio perskaityto puslapio numerį, gautume seką

$$1, \quad 6, \quad 11, \quad 16 \quad \ldots$$

Tegu a_n yra n-ąją dieną užsirašytas puslapio numeris.
Tada

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 5, \quad n \geqslant 2.$$

Seką (a_n) apibrėžėme rekurentiškai; kiekvienas jos narys gaunamas iš prieš jį esančio, prie šio pridedant 5. Tokią seką vadiname *aritmetine progresija*. Lotyniškai *progressio* reiškia didėjimą, augimą.

APIBRĖŽIMAS
Seką (a_n), kurios kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį esančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi d, vadiname aritmetine progresija. Skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos skirtumu.

Taigi aritmetinei progresijai apibrėžti pakanka nurodyti pirmąjį jos narį ir progresijos skirtumą d. Kitus narius vieną po kito galime skaičiuoti naudodamiesi rekurentine formule $a_{n+1} = a_n + d$.

Pavyzdžiui, jei $a_1 = 1$, o $d = 2$, tai aritmetinė progresija yra tokia:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \ldots$$

Jei $a_1 = 1, d = 0$, tai visi aritmetinės progresijos nariai yra lygūs: $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 0 = 1$, $a_3 = 1$ ir t. t.

Jei $a_1 = 1$ ir $d = -2$, tai gauname tokią aritmetinę progresiją:

$$1, \quad -1, \quad -3, \quad -5, \quad -7, \quad \ldots$$

Jei progresijos skirtumas teigiamas, $d > 0$, tai progresija didėja; jei $d = 0$, tai visi aritmetinės progresijos nariai lygūs tam pačiam skaičiui. Jei aritmetinės progresijos skirtumas neigiamas, $d < 0$, tai aritmetinė progresija mažėja.

Dažnai pakanka nagrinėti tik baigtinį skaičių vienas po kito einančių aritmetinės progresijos narių. Tada sakome, kad nagrinėjame *baigtinę* aritmetinę progresiją. Pavyzdžiui,

$$1, 3, 5, 7, 9, 11 \quad \text{ir} \quad 15, 17, 19, 21, 23$$

yra dvi baigtinės aritmetinės progresijos. Pirmoji turi šešis, antroji — penkis narius; abiejų progresijų skirtumas tas pats: $d = 2$.

1 užduotis. Įrodykite, kad didėjimo tvarka surašyti natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 3, sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad didėjimo tvarka surašyti natūralieji skaičiai, kuriuos dalijant iš 3 gaunama liekana 1, taip pat sudaro aritmetinę progresiją.

Atlikdami užduotį turbūt pasinaudojote skaičių, kurie dalijasi iš 3, sekos bendrojo nario formule $a_n = 3n$. Natūraliųjų skaičių, kurie dalijant iš 3 duoda liekaną 1, sekos bendrojo nario formulė yra $a_n = 1 + 3(n-1)$.

Išvesime bendrojo nario formulę bet kokiai aritmetinei progresijai.

Aritmetinės progresijos bendrojo nario formulė

Tegu aritmetinės progresijos pirmasis narys lygus a_1, o skirtumas lygus d. Užrašykime lygybes:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ a_n &= a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Sudėję kairiąsias ir dešiniąsias šių lygybių puses gausime:

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \dots + a_n &= a_1 + \dots + a_{n-1} + (n-1)d, \\ (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + a_n &= a_1 + (a_2 + \dots + a_{n-1}) + (n-1)d. \end{aligned}$$

Atėmę iš abiejų lygybės pusių tą patį skliaustuose užrašytą reiškinį gausime

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Tai ir yra aritmetinės progresijos bendrojo nario formulė.

1 PAVYZDYS. Aritmetinės progresijos pirmasis narys $a_1 = -3$, o skirtumas $d = 5$. Raskime šios progresijos penktąjį ir šimtąjį narius a_5, a_{100}. Ar kuris nors šios progresijos narys lygus 100?

Užrašę aritmetinės progresijos bendrojo nario formulę

$$a_n = -3 + 5(n-1) \quad \text{arba} \quad a_n = -8 + 5n$$

iš karto galime rasti bet kurį progresijos narį. Taigi

$$a_5 = -8 + 5 \cdot 5 = 17, \qquad a_{100} = -8 + 5 \cdot 100 = 492.$$

Jeigu n-asis progresijos narys būtų lygus 100, tai gautume

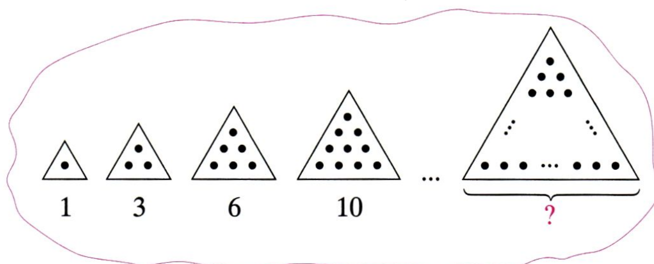
$$a_n = 100 \quad \text{arba} \quad -8 + 5n = 100, \quad n = \frac{92}{5}.$$

Tačiau $\frac{92}{5} = 18\frac{2}{5}$ nėra natūralusis skaičius, taigi negali būti aritmetinės progresijos nario numeris. Todėl aritmetinės progresijos nario, lygaus 100, nėra.

2 užduotis. Ar yra aritmetinės progresijos su $a_1 = -3, d = 5$ narys, lygus 92? Ar yra narys, lygus 67?

Aritmetinės progresijos narių sumos formulė

Pitagoriečiai mėgo nagrinėti geometrinius skaičius. Pavyzdžiui, trikampiais skaičiais jie vadino skaičius, kurie gaunami taip:



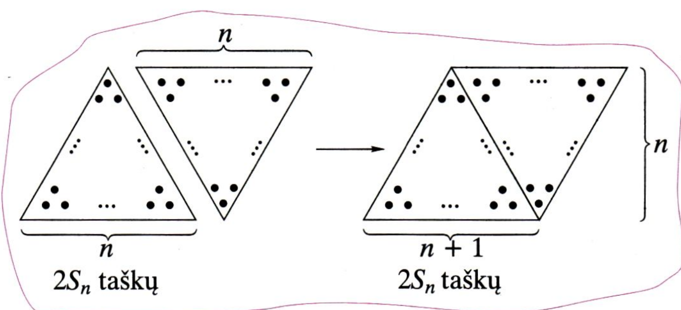
Įsižiūrėkime į n-ąjį trikampį. Jame taškai išdėstyti n eilutėse. Pirmoje eilutėje yra vienas taškas, antroje — du ir t. t. Taškų skaičius k-ojoje eilutėje ($k > 1$) skaičiuojant iš viršaus yra vienetu didesnis už $(k - 1)$-osios eilutės taškų skaičių. Taigi galime sakyti, kad taškų skaičiai atitinkamai pirmojoje, antrojoje, ..., n-ojoje eilutėse sudaro aritmetinę progresiją (a_n):

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 1.$$

Tada n-asis trikampis skaičius lygus šios aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumai. Pažymėję ją S_n galime užrašyti:

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{arba} \quad S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Suskaičiuoti S_n galime, pavyzdžiui, taip. Sugretinkime du vienodus trikampius, kuriuose pažymėta po S_n taškų, kaip parodyta brėžinyje:



Gausime figūrą, kurioje pažymėta $2S_n$ taškų. Kadangi šie taškai išsidėstę n eilutėse po $n + 1$, tai iš viso jų yra $(n + 1)n$. Taigi $2S_n = (n + 1)n$ ir

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Radome n pirmųjų aritmetinės progresijos (a_n) narių sumą, t. y. n-ąjį trikampį skaičių. Raskime bet kokios aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų n narių sumą

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Jeigu sumuosime narius kita tvarka, suma nepasikeis, taigi

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1.$$

Sudėkime kairiąsias ir dešiniąsias šių lygybių puses, dešinėje pusėje grupuodami dėmenis į poras:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Pirmosios narių poros suma lygi $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$; antrosios poros — $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$. Apskritai k-osios narių poros suma lygi

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = 2a_1 + (n-1)d.$$

Taigi visų porų sumos yra lygios $2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$. Kadangi iš viso yra n porų, tai

$$2S_n = \big(2a_1 + (n-1)d\big)n \quad \text{arba} \quad 2S_n = (a_1 + a_n)n.$$

Suradome aritmetinės progresijos n pirmųjų narių sumos formulę:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n \quad \text{arba} \quad S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n}$$

2 PAVYZDYS. Raskime sumą $1 + 4 + 7 + \cdots + 64$.

Matome, kad sumos dėmenys yra aritmetinės progresijos su $a_1 = 1, d = 3$ nariai. Taigi visi jie užrašomi formule

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3n - 2.$$

Raskime, kuris šios progresijos narys lygus 64:

$$64 = 3n - 2, \qquad 3n = 66, \qquad n = 22.$$

Taigi reikia rasti 22-jų aritmetinės progresijos narių sumą:

$$S_{22} = \frac{1+64}{2} \cdot 22 = 715.$$

3 PAVYZDYS. Sekos (a_n) pirmųjų n narių suma $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ skaičiuojama pagal formulę $S_n = 3n^2 - n + 1$. Ar seka (a_n) yra aritmetinė progresija?
Žinodami, kaip skaičiuoti sumas S_n galime rasti sekos (a_n) narius:

$$a_1 = S_1,$$
$$a_2 = (a_2 + a_1) - a_1 = S_2 - S_1,$$
$$a_3 = (a_3 + a_2 + a_1) - (a_2 + a_1) = S_3 - S_2 \quad \text{ir t. t.}$$

Kadangi

$$S_1 = 3 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 3, \quad S_2 = 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 11, \quad S_3 = 3 \cdot 3^2 - 3 + 1 = 25,$$

tai $a_1 = 3$, $a_2 = S_2 - S_1 = 8$, $a_3 = S_3 - S_2 = 14$.
Jeigu (a_n) būtų aritmetinė progresija, tai visi skirtumai $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots,$ $a_{n+1} - a_n, \ldots$ būtų lygūs.
Tačiau $a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5$, $a_3 - a_2 = 14 - 8 = 6$, taigi jau pirmieji du skirtumai yra nelygūs. Todėl seka (a_n) nėra aritmetinė progresija.

4 PAVYZDYS. Sekos (a_n) pirmųjų narių suma $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ skaičiuojama pagal formulę $S_n = 3n^2 - n$. Įrodykime, kad seka (a_n) yra aritmetinė progresija, ir raskime jos pirmąjį narį a_1 ir skirtumą d.
Jeigu visi skirtumai $a_{n+1} - a_n$ $(n \geqslant 1)$ yra lygūs, tai (a_n) yra aritmetinė progresija.
Skirtumą $a_{n+1} - a_n$ apskaičiuosime pasinaudoję lygybėmis:

$$a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = S_{n+1} - S_n,$$
$$a_n = (a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.$$

Gausime:

$$a_{n+1} - a_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} =$$
$$= 3(n+1)^2 - (n+1) - 2(3n^2 - n) + 3(n-1)^2 - (n-1) = 6.$$

Taigi (a_n) yra aritmetinė progresija, jos skirtumas $d = 6$, o pirmasis narys $a_1 = S_1 =$ $= 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$.

3 užduotis. Raskite aritmetinės progresijos (a_n) pirmąjį narį ir skirtumą, jei žinoma, kad n pirmųjų jos narių suma užrašoma formule $S_n = (1 - n)n$.

Aritmetinės progresijos (a_n) n-asis narys skaičiuojamas pagal formulę

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ skaičiuojama pagal formulę

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Pratimai ir uždaviniai

137. Kurios iš sekų yra aritmetinės progresijos:

a) $1, 11, 21, 31, \ldots;$
b) $-20, -18, -17, -13, \ldots;$
c) $5, 0, -5, -10, -15;$
d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots;$
e) $\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots;$
f) $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots$?

138. Parašykite pirmuosius penkis aritmetinės progresijos narius, kai:

a) $a_1 = 5$, $d = 3$;
b) $b_1 = 1{,}2$, $d = 0{,}2$;
c) $c_1 = \frac{1}{4}$, $d = 4$;
d) $y_1 = 100$, $d = -100$.

139. Seka (b_n) yra aritmetinė progresija, jos pirmasis narys yra b_1, o skirtumas d. Pirmuoju nariu b_1 ir skirtumu d išreikškite šiuos narius:
a) b_5; b) b_{20}; c) b_n; d) b_{n+3}; e) b_{2n}; f) b_{2n+4}.

140. Seka (x_n) aritmetinė progresija. Raskite:

a) x_5, kai $x_1 = 20$, $d = 4$;
b) x_{20}, kai $x_1 = 0{,}1$, $d = 10$;
c) x_{15}, kai $x_1 = -4$, $d = -8$;
d) x_{10}, kai $x_1 = -\frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$.

141. Raskite aritmetinės progresijos penktąjį, dešimtąjį ir n-ąjį narį, kai nurodyti du pirmieji jos nariai:
a) $7, 2, \ldots$; b) $\frac{1}{4}, 1, \ldots$; c) $-10, 10, \ldots$; d) $3{,}5, -3{,}5, \ldots$

142. Užrašykite aritmetinės progresijos n-ojo nario formulę, kai:

a) $a_1 = 4$, $a_2 = -4$;
b) $a_1 = 5$, $a_2 = 0$;
c) $a_1 = -7$, $a_4 = -1$;
d) $a_{10} = 0$, $a_{40} = -30$.

143. Raskite aritmetinės progresijos skirtumą ir pirmųjų dešimties narių sumą, kai:
a) $a_4 = 8{,}5$, $a_{10} = 20{,}5$; b) $a_6 = -3$, $a_{16} = -49{,}2$.

144. Raskite aritmetinės progresijos pirmąjį narį ir skirtumą, kai:

a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 \cdot a_5 = -36; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 38, \\ a_1 \cdot a_4 = 300. \end{cases}$

145. Seka (a_n) yra aritmetinė progresija. Užpildykite lentelę:

a_1	d	n	a_n	S_n
4	-3	20		
	6	10	60	
-7		8	0	
	0,5	101		3535
$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$		5	

146. Raskite skaičių x, tenkinantį lygybę:

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2x = 72$;

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2x - 1) = 81$;

c) $1 + 7 + 13 + \cdots + x = 280$;

d) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \cdots + (x + 28) = 155$;

e) $2^{1+3+5+\cdots+(2x-1)} = 2^{25}$;

f) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 + \cdots + \lg x^{100} = 5050$.

147. Kiek narių sudaro baigtinę aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys yra 7, skirtumas lygus 2, o visų narių suma lygi 12? (Du atvejai.)

148. Raskite:

a) 40 sekos narių sumą, jei bendrasis narys užrašomas formule $a_n = 9 - 5n$. Kiek ši seka turi teigiamų narių?

b) 30 sekos narių sumą, jei bendrasis narys užrašomas formule $b_n = 3n - 20$. Kiek ši seka turi neigiamų narių?

149. Įrodykite, kad jei sekos n narių suma su kiekvienu n apskaičiuojama pagal formulę: a) $S_n = n^2 - 5n$; b) $S_n = 6n - n^2$, tai ši seka yra aritmetinė progresija. Užrašykite šios sekos n-ojo nario formulę.

150. Raskite aritmetinės progresijos pirmųjų 10 narių sumą, kai:

a) $a_1 + a_3 + a_6 + a_8 = 2$; b) $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

151. Kampo AOB kraštinėje OA nuo viršūnės O atidėtos lygios atkarpos ir per jų galus nubrėžtos lygiagrečios tiesės. Atkarpos A_1B_1 ilgis lygus 2 cm. Apskaičiuokite atkarpų A_2B_2, A_5B_5, $A_{13}B_{13}$ ilgius.

152. Raskite stačiojo trikampio kraštinių ilgius, jeigu jie sudaro aritmetinę progresiją, o trikampio įžambinė lygi 35.

153. Alpinistas kopdamas į viršukalnę pirmą dieną pasiekė 800 m aukštį, o kiekvieną kitą dieną užkopdavo 50 m mažiau negu praėjusią dieną. Po kelių dienų alpinistas įkopė į 4800 m aukščio kalno viršūnę?

154. Bėgikas pirmą minutę nubėgo 300 m, o per kiekvieną kitą minutę 5 m mažiau nei per ankstesnę. Kokį atstumą jis nubėgo per 1 h, per ketvirtį valandos?

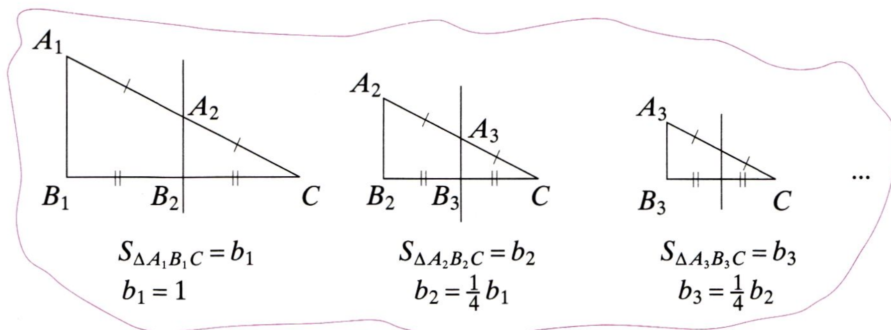
155. Baseine buvo 3000 ℓ vandens. Per vamzdį iš jo kas minutę išteka 5 ℓ vandens. Kiek litrų vandens liks baseine po 10 minučių, po pusvalandžio? Per kiek laiko iš baseino ištekės visas vanduo?

156. Darbininkams buvo pavesta iškasti šulinį. Už pirmą iškastą šulinio metrą sumokėta 10 litų, už antrą — 13 Lt, už trečią — 16 Lt ir t. t. Kiek reikėjo sumokėti darbininkams, jei jie iškasė 3 m; 5 m gylio šulinį?

157. Kino salėje yra 20 eilių. Kiekvienoje eilėje yra 5 vietomis daugiau negu prieš ją esančioje. Paskutinėje eilėje yra 120 vietų. Kiek žmonių gali sėdėti salėje?

17.4. Geometrinė progresija

Trikampio vidurinioji linija atkerta trikampį panašų į pradinį. Atkirsto trikampio plotas yra keturis kartus mažesnis: jei pradinio trikampio plotas lygus b_1, tai mažesniojo trikampio plotas $b_2 = \frac{1}{4}b_1$. Mažesniojo trikampio vidurinioji linija atkerta trikampį, kurio plotas $b_3 = \frac{1}{4}b_2$ ir t. t.



Tarkime, $b_1 = 1$. Gauname rekurentiškai apibrėžtą plotų seką: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$, $n \geqslant 1$. Kiekvienas sekos (b_n) narys, pradedant antruoju, gaunamas padauginus prieš jį einantį narį iš to paties daugiklio $\frac{1}{4}$. Tokia seka vadinama geometrine progresija. Apibrėšime geometrinę progresiją bendruoju atveju.

APIBRĖŽIMAS
Skaičių seka (b_n), kurios pirmasis narys nelygus nuliui ($b_1 \neq 0$), o kiekvienas kitas narys, pradedant antruoju, lygus prieš jį einančiam nariui, padaugintam iš nelygaus nuliui skaičiaus q, vadinama geometrine progresija. Skaičius q vadinamas geometrinės progresijos vardikliu.

Pavyzdžiui, jei $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$, tai gauname geometrinę progresiją

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \ldots$$

Jei $b_1 = 1, q = 2$, tai geometrinė progresija tokia:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots$$

Jei $b_1 = 1, q = -2$, tai gauname tokius geometrinės progresijos narius:

$$1, \quad -2, \quad 4, \quad -8, \quad \ldots$$

Kai nagrinėjame tik baigtinį skaičių iš eilės einančių geometrinės progresijos narių, paprastai sakome, kad nagrinėjame *baigtinę* geometrinę progresiją.

1 užduotis. Raskite keturis pirmuosius geometrinės progresijos narius, kai:
a) $b_1 = 2, q = \frac{1}{4}$; b) $b_1 = 3, q = 1$; c) $b_1 = 2, q = -1$.

Geometrinę progresiją apibrėžėme rekurentiškai. Tačiau nesunku išvesti ir bendrojo nario formulę.

Geometrinės progresijos bendrojo nario formulė

Tegu $b_1 \neq 0, q \neq 0$ yra geometrinės progresijos pirmasis narys ir vardiklis. Pasinaudoję rekurentine formule užrašykime narius $b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n$:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q, \\ b_3 &= b_2 q, \\ b_4 &= b_3 q, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{n-1} &= b_{n-2} q, \\ b_n &= b_{n-1} q. \end{aligned}$$

Sudauginę kairiąsias ir dešiniąsias puses gauname:

$$(b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}) b_n = b_1 (b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}) q^{n-1}.$$

Kadangi $b_1 \neq 0$ ir $q \neq 0$, tai ir $b_2 \neq 0$. Nesunku įsitikinti, kad $b_3 \neq 0$, $b_n \neq 0$ ir t. t. Taigi visi geometrinės progresijos (b_n) nariai nelygūs nuliui.

Tada ir skliaustuose užrašytas reiškinys nelygus nuliui. Padalinę iš jo gauname bendrojo nario formulę:

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

1 PAVYZDYS. Seka (b_n) yra geometrinė progresija, $b_1 = 5, q = 2$. Raskime b_3, b_5. Ar kuris nors šios progresijos narys lygus 300?

Pasinaudoję bendrojo nario formule narius b_3, b_5 galime skaičiuoti iš karto:

$$\begin{aligned} b_3 &= b_1 q^2 = 5 \cdot 2^2 = 20; \\ b_5 &= b_1 q^4 = 5 \cdot 2^4 = 80. \end{aligned}$$

Jeigu kuris nors šios progresijos narys būtų lygus 300, tai su tam tikru natūraliuoju skaičiumi n būtų teisinga lygybė $b_n = 300$, arba

$$b_1 q^{n-1} = 300, \qquad 5 \cdot 2^{n-1} = 300, \qquad 2^{n-1} = 60.$$

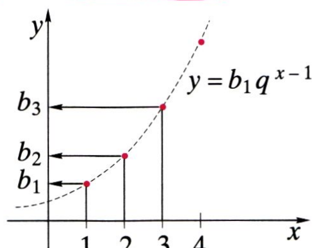
Tačiau skaičius 60 nėra dvejeto laipsnis su natūraliuoju rodikliu. Taigi joks sekos (b_n) narys nėra lygus 300.

2 užduotis. Ar kuris nors geometrinės progresijos $(b_n), b_1 = 5, q = 2$, narys lygus 320?

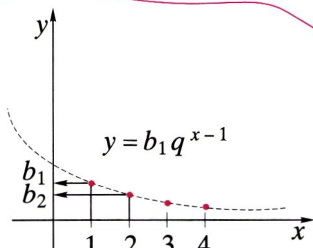
Panagrinėkime, kada geometrinė progresija mažėja, kada didėja.
Jei $b_1 > 0$ ir $q > 1$, tai $b_2 = b_1q > b_1, b_3 = b_2q > b_2$ ir t. t. Vadinasi, geometrinė progresija didėja.

Jei $q = 1$, tai visi geometrinės progresijos nariai lygūs.
Jei $b_1 > 0$ ir $0 < q < 1$, tai $b_2 = b_1q < b_1$, $b_3 = b_2q < b_2$ ir t. t. Taigi geometrinė progresija (b_n) mažėja.

Geometrinę progresiją (b_n), kai $q > 0$, $q \neq 1$, pavaizduokime koordinačių plokštumoje atidėję taškus $(1; b_1)$, $(2; b_2)$, ..., $(n; b_n)$, ... Šie taškai yra išsidėstę ant funkcijos $f(x) = b_1q^{x-1} = (b_1q^{-1})q^x$ grafiko.

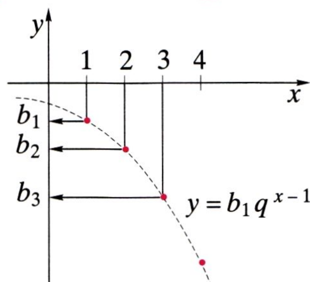


$b_1 > 0, q > 1$
Geometrinė progresija (b_n)
didėja

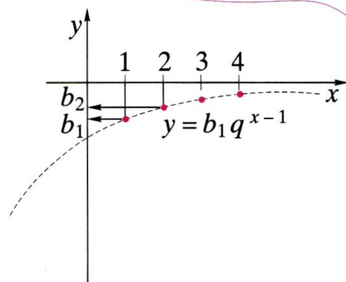


$b_1 > 0, 0 < q < 1$
Geometrinė progresija (b_n)
mažėja

Panašiai galime išnagrinėti ir atvejus $b_1 < 0$, $q > 1$; $b_1 < 0$, $0 < q < 1$.



$b_1 < 0, q > 1$
Geometrinė progresija (b_n)
mažėja



$b_1 < 0, 0 < q < 1$
Geometrinė progresija (b_n)
didėja

Kai $q < 0$, tai geometrinė progresija nėra nei didėjanti, nei mažėjanti. Iš tikrųjų, iš bendrojo nario formulės $b_n = b_1q^{n-1}$ matome, kad kai $n - 1$ lyginis, tai $q^{n-1} > 0$ ir b_n ženklas sutampa su b_1 ženklu, o kai $n - 1$ nelyginis, tai $q^{n-1} < 0$ ir b_n ženklas yra priešingas b_1 ženklui. Taigi (b_n) nariai „kaitalioja“ ženklus, todėl progresija nėra nei didėjanti, nei mažėjanti.

Geometrinės progresijos narių sumos formulė

Tegu (b_n) yra geometrinė progresija, skaičius q yra jos vardiklis. Rasime formulę, išreiškiančią geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumą

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Jeigu $q = 1$, tai visi progresijos nariai lygūs b_1, taigi $S_n = nb_1$. Nagrinėkime atvejį, kai $q \neq 1$. Padauginkime abi lygybės $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ puses iš q ($q \neq 0$, $q \neq 1$):

$$qS_n = qb_1 + qb_2 + \cdots + qb_n.$$

Pasinaudoję tuo, kad $qb_1 = b_2, qb_2 = b_3, \ldots, qb_{n-1} = b_n$, gautąją lygybę galime perrašyti taip:

$$qS_n = b_2 + b_3 + \cdots + b_n + qb_n.$$

Jeigu lygybės dešinės pusės suma prasidėtų nariu b_1, šioje pusėje atsirastų reiškinys, lygus S_n. Pridėkime trūkstamą narį, o kad nepasikeistų reiškinio reikšmė, tokį pat narį atimkime:

$$qS_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n - b_1 + qb_n, \qquad qS_n = S_n - b_1 + qb_n.$$

Dabar iš gautosios lygybės išreikškime S_n:

$$S_n - qS_n = b_1 - qb_n, \qquad S_n(1-q) = b_1 - qb_n, \qquad S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Gavome geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę. Pasinaudoję tuo, kad $b_n = b_1q^{n-1}$, ją galime užrašyti ir kitaip:

$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q}, \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

2 PAVYZDYS. Raskime geometrinės progresijos (b_n) pirmųjų dešimties narių sumą, kai: a) $b_1 = 1, q = 2$; b) $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$; c) $b_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

Visais atvejais pakanka pritaikyti geometrinės progresijos n narių sumos formulę, kai $n = 10$. Taigi:

a) atveju gauname $S_{10} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$;

b) atveju

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^9} = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1023}{512};$$

c) atveju

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^9} = \frac{1\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{341}{512}.$$

Geometrinės progresijos (b_n) *n-asis narys skaičiuojamas pagal formulę* $b_n = b_1 q^{n-1}$.
Geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

Pratimai ir uždaviniai

158. Kurios iš sekų yra geometrinės progresijos:

a) 3; −6; 12; −24; …;
b) 100; 20; 4; 0,8; …;
c) 6; 6; 6; 6; …;
d) 2π; $0{,}4\pi$; 8π; $1{,}6\pi$; …;
e) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; …;
f) $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; …?

159. Parašykite pirmuosius penkis geometrinės progresijos narius, kai:

a) $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{2}$;
b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 6$;
c) $b_1 = -100$, $q = -0{,}1$;
d) $b_1 = 0{,}5$, $q = -4$.

160. Seka (y_n) yra geometrinė progresija, kurios pirmasis narys y_1, o vardiklis q. Pirmuoju nariu y_1 ir vardikliu q išreikškite šiuos narius:
a) y_4; b) y_{20}; c) y_n; d) y_{n+5}; e) y_{2n}; f) y_{2n+3}.

161. Seka (x_n) yra geometrinė progresija. Raskite:

a) x_5, kai $x_1 = 10$, $q = 3$;
b) x_6, kai $x_1 = \frac{1}{6}$, $q = 6$;
c) x_7, kai $x_1 = -1$, $q = -0{,}4$;
d) x_8, kai $x_1 = 2$, $q = -0{,}1$.

162. Raskite geometrinės progresijos penktąjį, dešimtąjį ir n-ąjį narį, kai nurodyti du pirmieji geometrinės progresijos nariai:
a) 1; 2; …; b) $\frac{1}{3}$; −3; …; c) $-\frac{1}{7}$; $-\frac{2}{7}$; …; d) 0,25; −1; …

163. Užrašykite geometrinės progresijos n-ojo nario formulę, kai:

a) $b_1 = 8$, $b_2 = -4$;
b) $b_1 = 5$, $b_2 = 1$;
c) $b_1 = 4$, $b_2 = 4$;
d) $b_2 = 100$, $b_6 = 10^{-20}$;
e) $b_1 = \sin\alpha$, $b_2 = \frac{1}{2}\sin\alpha$;
f) $b_4 = -54$, $b_6 = 162$.

164. Raskite geometrinės progresijos vardiklį ir pirmųjų šešių narių sumą, kai:

a) $b_4 = 16$, $b_7 = -128$;

b) $b_2 = 1$, $b_5 = 64$.

165. Raskite geometrinės progresijos pirmąjį narį ir vardiklį, kai:

a) $\begin{cases} b_1 + b_2 = 9, \\ b_2 + b_3 = 24; \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_4 + b_1 = \frac{7}{16}, \\ b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}. \end{cases}$

166. Užpildykite lentelę, kai seka (b_n) yra geometrinė progresija:

b_1	q	n	b_n	S_n
3	2	5		
	0,5	10		256
$-\frac{1}{2}$		6	50 000	
	3	7		121
0,25	−4		−4096	

167. Raskite sumą:

a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^5$;

b) $2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \cdots - 2^{10}$;

c) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{50}$;

d) $x - x^3 + x^5 - \cdots + x^{21}$.

168. Raskite skaičių x, su kuriuo teisinga lygybė:

a) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{99} = 0$;

b) $x + x^2 + \cdots + x^{12} = 0$;

c) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + 2^x = -21$;

d) $1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{11}{16}$;

e) $1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^9 x = 0$;

f) $\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^{10} x = 0$.

169. Tarp duotųjų skaičių įterpkite keturis skaičius, kad visi šeši skaičiai sudarytų geometrinę progresiją:

a) 2 ir 156;

b) -3 ir 72;

c) 10 000 ir 1;

d) $\frac{1}{25}$ ir -625.

17.5. Nykstamoji geometrinė progresija

Panagrinėkime geometrinę progresiją (b_n), kai $b_1 > 0$ ir $0 < q < 1$. Pavyzdžiui, su $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ gauname tokius progresijos narius:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

Kai n didėja, sekos narys $b_n = \frac{1}{2^n}$ darosi vis mažesnis ir mažesnis; b_n vis mažiau skiriasi nuo nulio. Taigi sekos (b_n) riba lygi nuliui:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

Panagrinėkime geometrinės progresijos (b_n) pavyzdį su $b_1 > 0$ ir $-1 < q < 0$. Pavyzdžiui, su $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$ gauname tokią seką:

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad \ldots$$

Matome, kad šios sekos geometrinės progresijos nariai kaitalioja ženklus, o jie patys artėja prie nulio:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

Pastaroji lygybė teisinga bet kokiai geometrinei progresijai (b_n), kurios vardiklis tenkina nelygybę $-1 < q < 1$. Tokias geometrines progresijas vadiname nykstamosiomis.

APIBRĖŽIMAS
Jeigu geometrinės progresijos (b_n) vardiklis q moduliu mažesnis už vienetą, t. y. $|q| < 1$, tai geometrinę progresiją vadiname nykstamąja.

1 užduotis. Pasakykite, kada nykstamoji geometrinė progresija yra mažėjanti, kada nei didėjanti, nei mažėjanti.

Panagrinėkime nykstamąją geometrinę progresiją (b_n). Jos vardiklis q moduliu yra mažesnis už vienetą: $|q| < 1$. Pasinaudokime geometrinės progresijos narių sumos formule ir užrašykime šios progresijos pirmųjų n narių sumą:

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} q^n.$$

Kai n didėja, lygybės dešiniosios pusės antrasis narys vis mažiau skiriasi nuo nulio. Pavyzdžiui, jei $b_1 = 1, q = \frac{1}{3}$, tai skaičiuodami šį narį su $n = 1, n = 2, \ldots$ gautume

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{18}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \quad \ldots$$

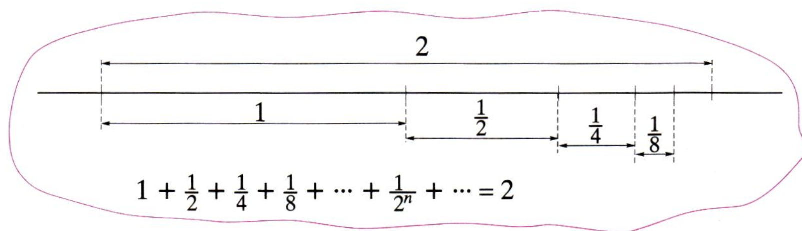
Taigi kai narių skaičius n didėja, nykstamosios geometrinės progresijos pirmųjų n narių suma darosi vis artimesnė skaičiui $\frac{b_1}{1-q}$, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

APIBRĖŽIMAS
Begalinės nykstamosios geometrinės progresijos (b_n) *suma vadiname skaičių* $\frac{b_1}{1-q}$; *čia* q *yra progresijos vardiklis.*
Rašome:

$$S = b_1 + b_2 + \cdots = \frac{b_1}{1-q}.$$

Kai nykstamąją geometrinę progresiją sudaro vien teigiami nariai, šią lygybę galima paaiškinti geometriškai. Tegu, pavyzdžiui, $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$. Imkime atkarpą, kurios ilgis lygus 2, dalykime ją pusiau, po to antrąją pusę vėl pusiau ir t. t.



Taip atkarpą padalijame į be galo daug dalių. Šių dalių ilgiai sudaro geometrinę progresiją. Jų ilgių suma lygi pradinės atkarpos ilgiui.

2 užduotis. Ar galima rasti geometrinės progresijos (b_n) sumą? Jeigu galima, raskite ją: a) $b_1 = 1, q = -\frac{2}{3}$; b) $b_1 = 1, q = \frac{2}{3}$; c) $b_1 = 1, q = \frac{3}{2}$; d) $b_1 = 1, q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Iš tikrųjų begalinės nykstamosios geometrinės progresijos narių sumą skaičiavome jau anksčiau, nors to ir nežinojome.
Prisiminkime dešimtaines trupmenas. Kiekvieną baigtinę dešimtainę trupmeną galima užrašyti paprastųjų trupmenų, kurių vardikliai yra dešimties laipsniai, suma. Pavyzdžiui,

$$0{,}3 = \frac{3}{10}, \qquad 0{,}33 = \frac{33}{100} = \frac{3\cdot 10 + 3}{100} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}.$$

Apskritai

$$0,\underbrace{33\ldots3}_{n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n}.$$

Matome, kad ši trupmena lygi geometrinės progresijos (b_n) su $b_1 = \frac{3}{10}$ ir $q = \frac{1}{10}$ pirmųjų n narių sumai.
Jeigu n didintume, tai trupmenos $0,\underbrace{33...3}_{n}$ reikšmė artėtų prie nykstamosios geometrinės progresijos su $b_1 = \frac{3}{10}$ ir $q = \frac{1}{10}$ sumos

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Kita vertus, kai n didėja, tai n $0,\underbrace{33...3}_{n}$ artėja prie $0,33... = 0,(3)$.

Taigi

$$0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Pasinaudoję nykstamosios geometrinės progresijos sumos formule dešimtainę begalinę periodinę trupmeną $0,(3)$ pavertėme paprastąja. Pirmajame vadovėlio skyriuje spręsti šį uždavinį išmokome kitaip:

$$x = 0,(3), \qquad 10x = 3,(3), \qquad 9x = 3, \qquad x = \frac{1}{3}.$$

Taigi šiuo būdu iš tikrųjų apskaičiavome nykstamos geometrinės progresijos su $b_1 = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{10}$ sumą.

PAVYZDYS. Paverskime dešimtaines trupmenas $0,2(5)$; $0,(12)$ paprastosiomis.
Tegu $x = 0,2(5)$. Tada

$$x = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots$$

Dešinėje lygybės pusėje užrašytos sumos nariai, pradedant antruoju, sudaro geometrinę progresiją su $b_1 = \frac{5}{100}$, $q = \frac{1}{10}$. Taigi pritaikę nykstamosios geometrinės progresijos sumos formulę gauname

$$x = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{5}{90} = \frac{23}{90}.$$

Tegu $y = 0,(12)$. Tada

$$y = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000} + \cdots$$

Sudėję narius poromis gauname

$$y = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \cdots$$

Pastebėję, kad sumos nariai sudaro geometrinę progresiją su

$$b_1 = \frac{12}{100}, \qquad q = \frac{1}{100},$$

gauname

$$y = \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

3 užduotis. Pasinaudoję begalinės geometrinės progresijos narių sumos formule užrašykite dešimtaines begalines periodines trupmenas $0{,}21(3)$; $0{,}1(23)$ paprastosiomis.

Jei geometrinės progresijos vardiklis moduliu yra mažesnis už vienetą, t. y. $|q| < 1$, tai geometrinę progresiją vadiname nykstamąja. Nykstamosios geometrinės progresijos suma skaičiuojama pagal formulę

$$S = b_1 + b_2 + \cdots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Pratimai ir uždaviniai

170. Raskite nykstamosios geometrinės progresijos sumą, jei jos pirmasis narys x_1, o vardiklis q.

a) $x_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$; b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;

c) $x_1 = 0{,}5$, $q = 0{,}2$; d) $x_1 = \frac{2}{5}$, $q = -\frac{4}{5}$.

171. Apskaičiuokite sumą:

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$; b) $6 - 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + \cdots$;

c) $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$; d) $-\frac{2}{3} - \frac{2}{15} - \frac{2}{75} - \cdots$.

172. Raskite skaičių x, tenkinantį lygybę:

a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots = 16^{-x} \cdot 25^{x}$; b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = 27^{x} \cdot 8^{-x}$;

c) $x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{x} \cdot \ldots = 3^{1,5}$; d) $x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} \cdot \ldots = 16$.

173. Parašykite paprastąja trupmena:

a) $0,(5)$; b) $0,(11)$; c) $6,(25)$; d) $10,(125)$.

174. Apskaičiuokite:

a) $0,(7) + 0,(3)$; b) $1,(12) - 1(2)$;

c) $0,(4) \cdot 0,(6)$; d) $4,(81) : 3(9)$.

175. Seka (a_n) apibrėžta rekurentiškai. Nustatykite, ar ši seka yra aritmetinė, ar geometrinė progresija, jei:

a) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 4a_n$;

b) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 4 + a_n$;

c) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n$;

d) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = -0,3a_n$.

Kiekvienu atveju apskaičiuokite pirmųjų penkių šios sekos narių sumą ir užrašykite n-ojo nario formulę.

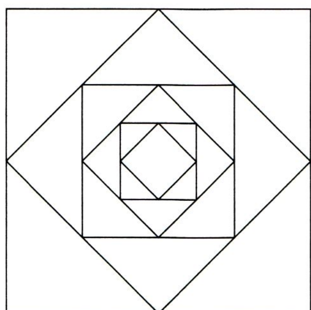
176. Trijų skaičių, sudarančių aritmetinę progresiją suma lygi 3. Raskite šiuos skaičius, jei pridėję prie jų atitinkamai 1, 7 ir 17 gauname geometrinę progresiją.

177. Trijų skaičių, sudarančių didėjančią geometrinę progresiją, suma lygi 65. Atėmus iš mažiausio skaičiaus 1, o iš didžiausio 19, gauti trys skaičiai sudarytų aritmetinę progresiją. Raskite šiuos skaičius.

178. Ar gali stačiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaryti geometrinę progresiją? Atsakymą pagrįskite.

179. Į miestą atvyko žmogus su labai įdomia naujiena ir per 3 minutes papasakojo ją dviem žmonėms. Kiekvienas iš jų vėl papasakojo naujieną per 3 minutes dviem žmonėms. Per kiek laiko šią naujieną galėtų sužinoti visi miesto gyventojai, jei jų yra 300 000?

180. Duotas kvadratas, kurio kraštinė a. Jo kraštinių vidurio taškai yra antro kvadrato viršūnės, antro kvadrato kraštinių vidurio taškai — trečio kvadrato viršūnės ir t. t.



Raskite:
a) penkto kvadrato plotą ir perimetrą;
b) pirmų penkių kvadratų plotų sumą;
c) visų kvadratų plotų sumą.

18. Kartojimo uždaviniai

1. Parašykite skaičių sekos pirmuosius penkis narius ir nustatykite, kurios iš sekų yra didėjančios, kurios — mažėjančios:

a) $a_n = \frac{n^2}{2n+n^3}$; b) $b_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}$; c) $c_n = 2^{n-1} + 2n$;

d) $d_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-n} - n$; e) $e_n = \log_2 3^n$; f) $f_n = \log_{\frac{1}{2}} 10^n$.

2. Kurie sekos nariai tenkina nurodytą sąlygą:

a) $x_n = 10n - 4$, $x_n < 49$;

b) $y_n = -\frac{1}{10}n + 5$, $y_n > -0{,}2$;

c) $y_n = 2^n + 4$, $0 < y_n < 20$;

d) $x_n = -3^n + 2$, $-50 \leqslant x_n \leqslant -25$?

3. Tarp duotųjų skaičių a ir b įrašykite tris skaičius, kad visi jie sudarytų aritmetinę progresiją:

a) $a = -17$, $b = -3$; b) $a = 24$, $b = -4$;

c) $a = -4{,}2$, $b = 0$; d) $a = 5\frac{1}{3}$, $b = 6\frac{2}{3}$.

4. Raskite aritmetinės progresijos (y_n) pirmąjį narį ir skirtumą, kai:

a) $y_{10} = 19$, $y_{16} = 6{,}1$; b) $y_5 = 8{,}2$, $y_{10} = 4{,}7$;

c) $y_8 = 11{,}2$, $y_{15} = 19{,}6$; d) $y_6 = -36{,}4$, $y_{18} = -31{,}6$.

5. Kiek reikia paimti aritmetinės progresijos (a_n) narių, kad jų suma būtų lygi S, kai:

a) $a_7 - a_2 = 20$; $a_3 = 9$ ir $S = 91$;

b) $a_5 - a_2 = 6$; $a_3 = 9$ ir $S = 192$?

6. Raskite natūralųjį skaičių n, su kuriuo teisinga lygybė:

a) $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 \cdot \ldots \cdot 3^{2n+1} = 27^5$;

b) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \ldots \cdot 2^{2n} = (0{,}25)^{-6}$.

7. Raskite sumą visų natūraliųjų triženklių skaičių, kuriuos dalijant iš 4 liekana yra 3.

8. Aritmetinės progresijos pirmųjų keturių narių suma 56, o paskutiniųjų keturių narių suma 112. Raskite, kiek progresijoje yra narių, jei pirmasis jos narys lygus 11.

9. Didėjančios aritmetinės progresijos antrojo, ketvirtojo ir šeštojo narių suma lygi 15, o trečiojo ir penktojo narių kvadratų suma lygi 58. Raskite progresijos septintąjį narį.

10. Raskite aritmetinės progresijos pirmąjį narį ir skirtumą, kai pirmųjų penkių narių, kurių numeriai yra lyginiai, suma lygi 15, o pirmųjų trijų narių suma lygi -3.

11. Dvi skruzdės, tarp kurių atstumas 13 m, tuo pačiu metu pradėjo judėti į vieną pusę. Pirmoji skruzdė per valandą nuropojo 25 m, o kiekvieną sekančią valandą 0,5 m daugiau negu praėjusią. Antroji skruzdė per valandą nuropojo 30 m, o kiekvieną sekančią valandą 0,5 m mažiau negu praėjusią. Po kelių valandų pirmoji skruzdė pavys antrąją?

12. Su kuriomis x reikšmėmis seka yra aritmetinė progresija:

a) $\sqrt{x-9}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x+15}$;

b) $\sqrt{x+1}$; $\frac{1}{2}\sqrt{x-7}$; 2?

13. Seka (b_n) yra geometrinė progresija. Raskite n, kai:

a) $b_1 = 125$; $q = 0{,}2$ ir $b_n = 1$;

b) $b_1 = 0{,}001$; $q = -10$ ir $b_n = 1000$;

c) $b_1 = \frac{1}{81}$; $q = 3$ ir $b_n = 27$;

d) $b_1 = \frac{1}{128}$; $q = 2$ ir $b_n = 32$.

14. Geometrinė progresija apibrėžta formule. Raskite S_n, kai:

a) $b_n = 5^{n+1}$; b) $b_n = 4^{1-n}$;

c) $b_n = 3 \cdot 2^{n+2}$; d) $b_n = 5 \cdot 3^{2-n}$.

15. Trys duotieji skaičiai, kurių suma lygi 26, sudaro geometrinę progresiją. Jei prie šių skaičių atitinkamai iš eilės pridėsime 1; 6 ir 3, tai gautieji skaičiai sudarys aritmetinę progresiją. Raskite duotuosius skaičius.

16. Trys duotieji skaičiai, kurių suma lygi 30, sudaro aritmetinę progresiją. Jei iš antrojo skaičiaus atimsime 2, o kitus skaičius paliksime nepakeitę, tai jie visi trys jau sudarys geometrinę progresiją. Raskite duotuosius skaičius.

17. Raskite a, b, c, kai:

a) a, b ir c — sudaro geometrinę progresiją; a, $b-8$, c — sudaro aritmetinę progresiją ir $a+b+c=-7$;

b) a, b, c — sudaro geometrinę progresiją; a, $b+8$, c — sudaro aritmetinę progresiją ir $a+b+c=7$.

18. Raskite nykstamosios geometrinės progresijos sumą:

a) 64; 16; 4; ...; b) 81; 8,1; 0,81; ...; c) 432; 72; 12; ...;

d) -220; -44; $-8{,}8$; ...; e) $\sqrt{5}$; $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$; ...; f) $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; ...

19. Pakeiskite paprastąja trupmena:

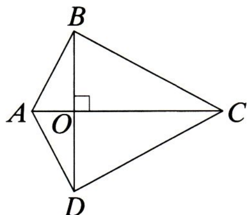
a) 2,(6); b) 3,2(3); c) 1,(27);

d) 0,1(54); e) 0,2(45); f) 10,03(7).

20. Įrodykite, kad į apskritimą įbrėžta trapecija yra lygiašonė.

21. Apie skritulį apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios perimetras lygus 28 cm. Apskaičiuokite trapecijos šoninės kraštinės ilgį.

22. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės susikerta statmenai taške O ir $AO = \frac{1}{2}AB$. Įstrižainė BD dalija keturkampį į lygiakraštį trikampį BCD ir lygiašonį trikampį ABD. Ar apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą?



23. Į apskritimą įbrėžta lygiašonė trapecija, kurios šoninė kraštinė lygi trumpesniajam pagrindui. Trapecijos smailusis kampas lygus 70°. Raskite lankų, į kuriuos apskritimą dalija trapecijos viršūnės, didumus laipsniais.

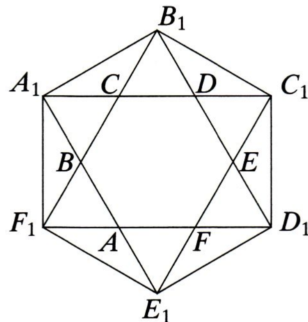
24. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis lygus c, o statinių ilgių suma lygi s. Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo skersmenį.

25. Raskite lygiakraščio trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio plotų santykį, jei jų perimetrai yra lygūs.

26. Raskite apskritimų skersmenų santykį:
a) įbrėžto į taisyklingąjį trikampį ir apibrėžto apie jį;
b) įbrėžto į taisyklingąjį keturkampį ir apibrėžto apie jį;
c) įbrėžto į taisyklingąjį šešiakampį ir apibrėžto apie jį.

27. Įbrėžto į apskritimą taisyklingojo trikampio kraštinė lygi $\sqrt{6}$. Raskite į tą apskritimą įbrėžto kvadrato kraštinę ir apskritimo spindulį.

28. Taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ kraštinės pratęstos iki susikirtimo taškuose A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Įrodykite, kad gautieji susikirtimo taškai yra taisyklingojo šešiakampio viršūnės.



29. Statmenys, išvesti per trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškus, susikerta kraštinės BC taške D. Įrodykite, kad $\angle A = 90°$.

30. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 20 cm, šoninė kraštinė lygi 26 cm. Raskite į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

31. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys 4 cm. Lietimosi taškas įžambinę dalija į 5 cm ir 12 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio perimetrą.

32. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 21 cm ir 20 cm. Raskite apibrėžto apie trikampį ir įbrėžto į trikampį apskritimų spindulius.

33. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 10 cm, o aukštinė — 8 cm. Apskaičiuokite apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį.

34. a) Lygiašonio trikampio aukštinė lygi h, kampas prie pagrindo α. Raskite į trikampį įbrėžto apskritimo ilgį.
b) Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo β, šoninė kraštinė lygi m. Raskite į trikampį įbrėžto skritulio plotą.

35. a) Apskritimo spindulys lygus 12,3 cm. Apskaičiuokite apie apskritimą apibrėžto taisyklingojo 10-kampio plotą $0{,}1\ \text{cm}^2$ tikslumu.
b) Apskritimo spindulys lygus 18 cm. Apskaičiuokite į apskritimą įbrėžto taisyklingojo 9-kampio plotą $1\ \text{cm}^2$ tikslumu.

36. a) Stačiojo trikampio įžambinė lygi 17 cm, statinių suma lygi 23 cm. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto skritulio plotą.
b) Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 12 cm, šoninė kraštinė ilgesnė už į pagrindą nubrėžtą aukštinę 2 cm. Apskaičiuokite apie trikampį apibrėžto apskritimo ilgį.

37. a) Į apskritimą įbrėžto kvadrato plotas lygus $144\ \text{cm}^2$. Apskaičiuokite į tą apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio plotą.
b) Į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio plotas lygus $81\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Apskaičiuokite į tą apskritimą įbrėžto kvadrato plotą.

38. Taškai $A(-2; 1)$, $B(-9; 8)$, $C(0; 5)$, $D(x; y)$ yra lygiagretainio $ABCD$ viršūnės. Raskite taško D koordinates.

39. Ar kolinearūs vektoriai:
a) $\vec{a}(-2; 3{,}5)$, $\vec{b}(1; -1{,}75)$; b) $\vec{m}(0{,}2; 4)$, $\vec{n}(0{,}4; 2)$?

40. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai:
a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2{,}4$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 30°$;
b) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3{,}5$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 120°$;
c) $|\vec{a}| = 1{,}6$, $|\vec{b}| = 0{,}5$, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygiagretūs ir vienakrypčiai;
d) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygiagretūs ir priešpriešiai.

41. Kaip išdėstyti vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{r}$, jeigu:
a) $\vec{p} \cdot \vec{r} = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}|$; b) $\vec{p} \cdot \vec{r} = -|\vec{p}| \cdot |\vec{r}|$?

42. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, jeigu:
a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$; b) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1{,}5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1{,}5$; d) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2{,}5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5\sqrt{3}$.

43. Duotas lygiakraštis trikampis ABC ir jo kraštinėse pažymėti vektoriai $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Raskite:

a) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$; b) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, kai $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$.

Įvairūs uždaviniai

44. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$

45. Dviženklį skaičių padaliję iš jo skaitmenų sumos, gausime dalmenį 4 ir liekaną 3. Jeigu šį skaičių padalysime iš jo skaitmenų sandaugos, tai dalmuo bus lygus 3, o liekana lygi 5. Raskite šį skaičių.

46. Dviratininkas per kiekvieną minutę nuvažiuoja 500 metrų mažiau, negu motociklininkas. Todėl 120 km kelio atkarpai nuvažiuoti dviratininkas sugaišo 2 h daugiau negu motociklininkas. Apskaičiuokite dviratininko ir motociklininko greičius.

47. Su kuriomis a, b ir c reikšmėmis lygybė

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}$$

teisinga su visomis galimomis x reikšmėmis?

48. Išspręskite lygtį:

a) $\sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2} = 2$; b) $|x| + |x-1| = 1$.

49. Apskaičiuokite:

a) $\big((\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2 + 7\big) \cdot \big(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2 - 7\big)$; b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} - \sqrt{3}$.

50. Įrodykite, kad su visais teigiamais a ir b teisinga nelygybė

$$a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2.$$

51. Įrodykite, kad su visais $n \in \boldsymbol{N}$ skaičius $A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ yra lygus natūraliojo skaičiaus kvadratui.

52. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; b) $f(x) = \sqrt{1 - 2\sin x}$.

53. Apskaičiuokite:

a) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$; b) $\cos\big(\arcsin\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\big) - \operatorname{arctg} 0\big)$.

54. Apskaičiuokite:

$$\frac{2002}{\log_2(2002!)} + \frac{2002}{\log_3(2002!)} + \cdots + \frac{2002}{\log_{2002}(2002!)}.$$

IV Įvykiai ir tikimybės

19. Bandymai, baigtys, įvykiai
19.1. Bandymai ir baigtys 100
19.2. Atsitiktiniai įvykiai 103
19.3. Įvykių veiksmai 107

20. Įvykių tikimybės
20.1. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas 112
20.2. Tikimybių savybės 115
20.3. Pasitelkime kombinatoriką 119
20.4. Bendrasis įvykio tikimybės apibrėžimas 124

21. Sąlyginė tikimybė
21.1. Sąlyginės tikimybės apibrėžimas 129
21.2. Nepriklausomi įvykiai 133

22. Kartojimo uždaviniai 136



19. Bandymai, baigtys, įvykiai

Daugelį reiškinių valdo griežti dėsniai, kuriais remiantis galima numatyti ateitį. Pavyzdžiui, mestas kampu į horizontą akmuo skries parabole, nukritus temperatūrai iki nulio, vanduo užšals ir t. t.

Tačiau kas gali pasakyti, ar laimės jo nupirktas loterijos bilietas, ar, metus lošimo kauliuką, atsivers šešios akutės? Šie įvykiai gali įvykti, bet gali ir neįvykti. Sakome, kad šie įvykiai yra atsitiktiniai. Tačiau ir atsitiktiniai įvykiai paklūsta tam tikriems dėsniams. Šiuos dėsnius nagrinėjanti matematikos kryptis vadinama *tikimybių teorija*.

19.1. Bandymai ir baigtys

Jei nieko nedarai, tai nieko ir neįvyksta. Kad galėtume stebėti įvykius, reikia atlikti bandymus. Dažnai neįmanoma numatyti, kas įvyks atlikus bandymą, tačiau galima išvardyti visas galimybes, t. y. išvardyti visas bandymo baigtis. Štai keletas pavyzdžių.

1 PAVYZDYS. Jei mesime monetą, galimos dvi baigtys: moneta gali atsiversti herbu arba skaičiumi.





Pažymėję šias baigtis raidėmis, pavyzdžiui, e_1, e_2, galime sudaryti šio bandymo baigčių aibę $E = \{e_1, e_2\}$. Tiesa, galima įsivaizduoti ir trečiąją bandymo baigtį: ant briaunos atsistojusią monetą. Tačiau ši baigtis tokia neįtikėtina, kad ir nagrinėti jos neverta.

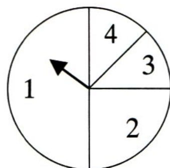
2 PAVYZDYS. Pagaminta produkcija prieš ją parduodant paprastai yra tikrinama. Tarkime, kad kontrolierius iš visos tą dieną pagamintos produkcijos atsitiktinai paima vieną gaminį. Jis gali būti standartinis arba nestandartinis, tačiau koks — iš anksto nežinia. Taigi galimos dvi šio bandymo baigtys: e_1 — gaminys standartinis, e_2 — gaminys nestandartinis. Bandymo baigčių aibė yra $E = \{e_1, e_2\}$.

3 PAVYZDYS. Prieš mesdami lošimų kauliuką galime tik spėlioti, kiek akučių atsivers.



Tačiau žinome, kad yra šešios galimybės, t. y. šešios bandymo baigtys: e_1 — atsivers viena akutė, e_2 — atsivers dvi akutės, ..., e_6 — atsivers šešios akutės. Šio bandymo baigčių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

4 PAVYZDYS. Laimės ratas suskirstytas į sektorius taip, kaip parodyta paveikslėlyje.



Laimės ratas gali suktis apie savo ašį, o rodyklė nejuda. Pasukę ratą laukiame, kol jis sustos. Ratui sustojus, rodyklė gali atsidurti viename iš keturių sektorių arba ant dviejų sektorių ribos. Susitarkime, kad, rodyklei sustojus ant ribos, ratas dar truputį pasukamas laikrodžio rodyklių judėjimo kryptimi, kad laimės rato rodyklė atsidurtų gretimame sektoriuje. Tada galimos keturios šio bandymo baigtys: e_1 — rodyklė atsidurs pirmajame, e_2 — antrajame, e_3 — trečiajame, e_4 — ketvirtajame sektoriuje. Bandymo baigčių aibė yra $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

5 PAVYZDYS. Panagrinėkime sudėtingesnį bandymą. Pasukę tą patį laimės ratą kaip 4 pavyzdyje ir sulaukę, kada jis sustos, pasukime jį dar kartą. Ir pirmą, ir antrą kartą rodyklė gali atsidurti viename iš keturių pažymėtų sektorių. Jeigu, pirmą kartą pasukus ratą, rodyklė atsidūrė i-ajame, o antrą kartą j-ajame sektoriuje, tai tokią bandymo baigtį pažymėkime $(i; j)$, $(i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4)$. Taigi bandymo baigčių aibė sudaryta iš šešiolikos baigčių:

$$\begin{array}{llll} e_1 = (1;1), & e_5 = (2;1), & e_9 = (3;1), & e_{13} = (4;1), \\ e_2 = (1;2), & e_6 = (2;2), & e_{10} = (3;2), & e_{14} = (4;2), \\ e_3 = (1;3), & e_7 = (2;3), & e_{11} = (3;3), & e_{15} = (4;3), \\ e_4 = (1;4), & e_8 = (2;4), & e_{12} = (3;4), & e_{16} = (4;4). \end{array}$$

Užduotis. Atliekamas bandymas: metamos dvi monetos ir stebima, kuria puse atvirto pirmoji, kuria — antroji moneta. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

Taigi norėdami nagrinėti atsitiktinius bandymo įvykius pirmiausia turime apibrėžti jo baigtis ir sudaryti bandymo baigčių aibę $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Žinoma, ne kiekvieno bandymo visas baigtis galima surašyti — jų gali būti labai daug. Dažnai pakanka žinoti, kiek tų baigčių yra.

Galime įsivaizduoti ir tokius bandymus, kurių baigčių aibė yra begalinė.
Tarkime, kad bandymas — monetos mėtymas, kol pirmą kartą atsivers herbas. Iš anksto nežinome, kiek kartų teks mesti monetą. Žymėdami herbo atsivertimą H ir skaičiaus — S visas baigtis galime surašyti taip:

$$H, \quad SH, \quad SSH, \quad SSSH, \quad \ldots$$

Taigi tokio bandymo baigčių aibė yra begalinė.
Toliau nagrinėsime tik baigtines baigčių aibes turinčius bandymus. Bandymo baigtys dažnai yra vadinamos *elementariaisiais įvykiais*.

Pratimai ir uždaviniai

1. Metus tetraedro formos lošimo kauliuką, ant kurio sienelių pažymėtos viena, dvi, trys ir keturios akutės, stebima, ant kurios iš sienelių jis atsistos. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

2. Vieną kartą kartu metami tetraedro formos lošimo kauliukas (su 1, 2, 3 ir 4 akučių sienelėmis) ir moneta. Stebima, ant kurios sienelės atsistos kauliukas ir kuria puse atvirs moneta. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

3. Žaidimų aikštelės dėžėje daugybė žalių, raudonų ir mėlynų rutulių.

a) Vaikas atlieka bandymą: iš dėžės atsitiktinai paima vieną rutulį. Kokia šio bandymo baigčių aibė?

b) Vaikas atlieka bandymą: iš dėžės atsitiktinai paima du rutulius. Kokia šio bandymo baigčių aibė?

4. Šachmatininkai Algis ir Bronius atlieka bandymą: žaidžia vieną partiją. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

5. Poliklinikoje dirba gydytojas Algis ir gydytoja Birutė. Į polikliniką ateina vienas pacientas, po to — kitas. Abu jie atsitiktinai pasirenka gydytoją. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę.

6. Trys raidyno raidės A, B ir C dedamos į eilę atsitiktinai. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

7. Šaulys šauna į taikinį du kartus ir stebi, ar pataikė. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę.

8. Pasodinę pirmą, antrą ir trečią egzotiškus medelius stebime, ar jie prigis. Užrašykite bandymo baigčių aibę.

9. Mokinys nusipirko du skirtingų loterijų bilietus tikėdamasis išlošti. Užrašykite baigčių aibę.

10. Bandymas yra futbolo turnyras, kuriame dalyvauja trys komandos. Jos susitinka tarpusavyje po vieną kartą. Pagal turnyro taisykles lygiosios negalimos. Užrašykite šio bandymo baigčių aibę.

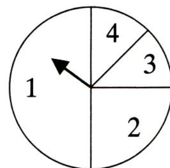
Lošimas su kauliukais — beveik toks pat senas žaidimas, kaip pati civilizacija. Lošėjai pavaizduoti egiptiečių piešiniuose, puošiančiuose daugiau kaip 5000 metų senumo kapavietes, nupiešti ant Antikos Graikijos vazų...
Iš arabiško žodžio, reiškiančio kauliuką, atsirado mūsų žodis „azartas“!

19.2. Atsitiktiniai įvykiai

Dažniausiai mums rūpi ne vien tik bandymo baigtys, t. y. elementarieji įvykiai, bet ir kiti su bandymu susiję atsitiktiniai įvykiai. Pavyzdžiui, pasukus laimės ratą, gali būti ne tiek svarbu, kuriame sektoriuje atsidurs rodyklė, kiek tai, ką laimėsime.

1 PAVYZDYS. Prisiminkime ankstesniame skyrelyje nagrinėtą bandymą su laimės ratu. Sulaukę, kol pasuktas ratas sustos, nustatome, kokiame sektoriuje atsidūrė rodyklė.

Šio bandymo baigčių aibė yra tokia:



$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

čia e_1, e_2, e_3, e_4 reiškia baigtis, kad, rodyklė atsidūrė atitinkamai pirmajame, antrajame, trečiajame ir ketvirtajame sektoriuose. Tarkime, kad laimės ratas ne šiaip sau sukiojamas, bet su juo lošiama.

Tarkime, pavyzdžiui, kad rodyklei atsidūrus laimės rato sektoriuose, pažymėtuose lyginiais numeriais, lošėjas laimi 100 litų, o likusiuose — nelaimi nieko. Jeigu A yra įvykis, kad lošėjas laimi 100 litų, tai bandymo baigtys e_2 ir e_4 yra palankios šiam įvykiui, o baigtys e_1 ir e_3 — jam nepalankios. Palanki baigtis — tai tarsi atsitiktinio įvykio dalelė, todėl įvykį A sutapdinsime su jam palankių baigčių aibe $\{e_2, e_4\}$, t. y. tiesiog rašysime, jog $A = \{e_2, e_4\}$. Kitus su bandymu susijusius įvykius atitinka kitos baigčių aibės.

Pavyzdžiui, įvykį, kad lošėjas nieko neišloš, galime sutapdinti su baigčių aibe $\{e_1, e_3\}$; baigčių aibė $\{e_1, e_2, e_3\}$ atitinka įvykį, kad rodyklė nesustos ketvirtajame sektoriuje.

Šitaip atsitiktinius įvykius nagrinėsime ir kitais atvejais.

Kiekvieną su bandymu susijusį įvykį vaizduosime palankių jam bandymo baigčių aibe. Kiekvienas bandymo baigčių aibės poaibis atitiks su bandymu susijusį įvykį.

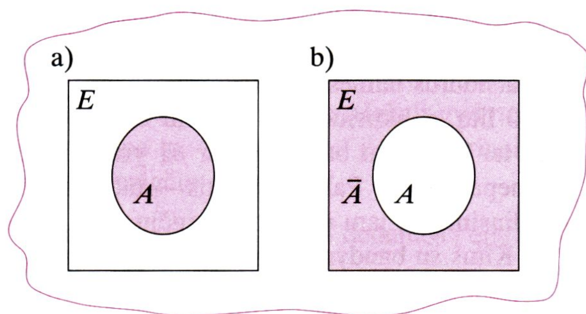
2 PAVYZDYS. Jei bandymas yra lošimo kauliuko metimas, tai jo baigčių aibė yra $E = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$, čia e_i reiškia baigtį, kad atsivertė i ($i = 1, \dots, 6$) akučių. Tada atsitiktinį įvykį A, kad atsivertė lyginis akučių skaičius, sutapdiname su poaibiu $\{e_2, e_4, e_6\}$, t. y. $A = \{e_2, e_4, e_6\}$. Jei B — įvykis, kad atsivertė ne mažiau kaip 2 akutės, tai $B = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Su šiuo bandymu galime susieti ir tokius įvykius: C — atsivertė ne mažiau kaip viena akutė, D — atsivertė daugiau kaip 6 akutės. Aišku, kad, kiekvieną kartą atlikus bandymą, įvykis C įvyks, o įvykis D — neįvyks. Todėl įvykį C vadiname *būtinuoju*, o įvykį D — *negalimuoju*. Būtinajam įvykiui palankios visos bandymo baigtys, o negalimajam — palankių baigčių nėra. Todėl

$$C = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}, \qquad D = \varnothing.$$

APIBRĖŽIMAS
Įvykį, kuriam palankios visos bandymo baigtys, vadiname būtinuoju.
Įvykį, neturintį palankių baigčių, vadiname negalimuoju.

Žodžiais būtinąjį ir negalimąjį įvykius galima nusakyti įvairiai. Pavyzdžiui, lošimo kauliuko metimo bandymo būtinąjį įvykį galime nusakyti ir taip: atsivers ne daugiau kaip 100 akučių, negalimąjį — atsivers mažiau kaip viena akutė.

Atsitiktinį įvykį, susijusį su bandymu, sutapdiname su palankių jam bandymo baigčių poaibiu. Aibes kartais patogu vaizduoti Veno diagramomis. Taigi ir atsitiktinius įvykius galime vaizduoti tokiomis diagramomis. Pavyzdžiui, a) brėžinyje kvadratas vaizduoja visą bandymo baigčių aibę, o nuspalvinta sritis — įvykiui A palankių baigčių poaibį, t. y. įvykį A.



Poaibis, sudarytas iš visų *nepalankių* įvykiui A baigčių, taip pat atitinka atsitiktinį įvykį, susijusį su nagrinėjamu bandymu. Brėžinyje b) toks įvykis pavaizduotas nuspalvinta sritimi.

APIBRĖŽIMAS
Įvykį, kuriam palankios visos tos baigtys, kurios nepalankios įvykiui A, vadiname priešinguoju įvykiui A. Įvykiui A priešingąjį įvykį žymime $\overline{A}$.

3 PAVYZDYS. Bandymas — dviejų lošimo kauliukų metimas. Nagrinėkime tokius įvykius: A — „atsivertusių akučių suma yra lyginis skaičius“, B — „atsivertė nors vienas šešetukas“, C — „atsivertusių akučių suma ne mažesnė už 10“.

Priešinguosius įvykius žodžiais galime nusakyti taip: $\overline{A}$ — „atsivertusių akučių suma yra nelyginis skaičius“, $\overline{B}$ — „neatsivertė nei vienas šešetukas“, $\overline{C}$ — „atsivertusių akučių suma mažesnė už 10“.

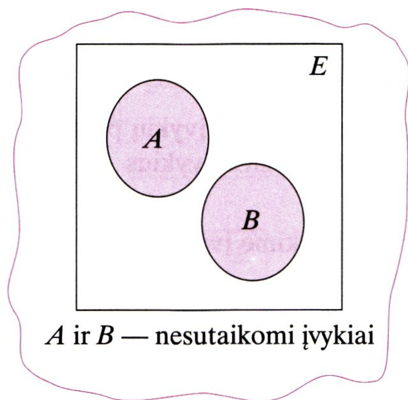
Būtinojo įvykio priešingasis įvykis yra negalimas įvykis, o negalimojo įvykio priešingasis įvykis — būtinasis įvykis.

1 užduotis. Du kartus šaunama į taikinį. Šio bandymo baigtis žymėsime raidžių t, n poromis. Pavyzdžiui, pora $(n; t)$ reiškia, kad pirmasis šūvis nepataikė į taikinį, o antrasis — pataikė. Kokie yra šio bandymo įvykių $C = \{(t; n), (n; t)\}$ ir $D = \{(t; t), (t; n)\}$ priešingieji įvykiai? Apibūdinkite juos žodžiais.

Jei A yra su bandymu susijęs įvykis, tai, atlikus bandymą, vienas iš įvykių A ir $\overline{A}$ būtinai įvyksta. Tačiau abu kartu šie įvykiai įvykti negali, nes nėra nei vienos palankios abiems įvykiams baigties. Įvykiai, kurie negali įvykti vienu metu, vadinami *nesutaikomais*.

APIBRĖŽIMAS
Du įvykiai vadinami nesutaikomais, jeigu nėra nei vienos baigties, kuri būtų palanki abiems įvykiams.

Diagramose nesutaikomus įvykius vaizduojame bendrų elementų neturinčiomis sritimis.



A ir B — nesutaikomi įvykiai

Įvykis A ir jam priešingasis įvykis $\overline{A}$ yra nesutaikomi. Taigi būtinasis ir negalimasis įvykiai yra nesutaikomi. Kadangi negalimasis įvykis iš viso neturi nei vienos jam palankios baigties, tai jis nesutaikomas su bet kokiu kitu įvykiu.
Kai A nėra nei būtinasis, nei negalimasis įvykis, tai galima nurodyti ne vieną įvykį B, kuris yra nesutaikomas su A.

4 PAVYZDYS. Urnoje yra 3 rutuliai: baltas, juodas ir raudonas. Bandymo metu iš urnos atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys. Nagrinėkime įvykius: A — „ištrauktas baltas rutulys“, B — „ištrauktas juodas rutulys“, C — „ištrauktas raudonas rutulys“. Tada įvykiai A ir B, A ir C, B ir C yra nesutaikomi. Įvykiai A ir $\overline{A}$, B ir $\overline{B}$, C ir $\overline{C}$, žinoma, taip pat nesutaikomi.

2 užduotis. Bandymas yra dviejų lošimo kauliukų metimas. Išvardykite visus įvykius, kurie yra nesutaikomi su įvykiu A — „iškritusių akučių suma mažesnė už 10“.

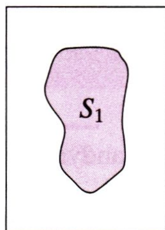
Pratimai ir uždaviniai

11. Kurie įvykiai yra būtinieji, kurie negalimieji, kurie atsitiktiniai:
A — į taikinį šauta 2 kartus ir 3 kartus pataikyta;
B — į taikinį šauta 3 kartus ir bent kartą pataikyta;
C — metus lošimo kauliuką tris kartus, atsivertusių akučių suma neviršija 18;
D — vieną kartą metus tris lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma lygi 17;
E — vieną kartą metus lošimo kauliuką, atsivertusių akučių skaičius k tenkina nelygybę $0 < k \leqslant 10$;
F — atsitiktinai pasirinktas triženklis skaičius neviršija 1000;
G — metus tris monetas, visos trys atsivertė herbu?

12. Vieną kartą metamos dvi monetos ir stebima, kuria puse atvirs pirmoji, kuria — antroji moneta.
a) Parašykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite įvykius jiems palankių baigčių aibėmis:
A — bent viena moneta atsivertė skaičiumi;
B — bent viena moneta atsivertė herbu;
C — abi monetos atsivertė herbu;
D — abi monetos atsivertė skaičiumi.
c) Iš įvykių A, B, C, D sudarykite visas nesutaikomų įvykių poras.
d) Užrašykite įvykiams A, B, C, D priešinguosius įvykius $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ ir apibūdinkite juos žodžiais.

13. Vieną kartą metamas lošimo kauliukas. Pažymėkime įvykius:
A — atsivertė 4 akutės;
B — atsivertė lyginis akučių skaičius;
C — atsivertė daugiau kaip 4 akutės.
a) Užrašykite tas įvykių A, B, C poras, kurias sudaro nesutaikomi įvykiai.
b) Priešinguosius įvykius $\overline{A}$, $\overline{B}$ ir $\overline{C}$ užrašykite baigčių aibėmis ir apibūdinkite žodžiais.

14. Popieriaus lape nuspalvinta uždara sritis S_1.



Raide A pažymėkime įvykį „pieštuko smaigaliu atsitiktinai bakstelėjus į popieriaus lapą, pataikyta į sritį S_1“.
a) Žodžiais apibūdinkite įvykį $\overline{A}$.
b) Kaip reikia nubrėžti sritį S_2, kad įvykis B „pieštuko smaigaliu atsitiktinai bakstelėjus į popieriaus lapą, pataikyta į sritį S_2“ ir įvykis A būtų nesutaikomi?

19.3. Įvykių veiksmai

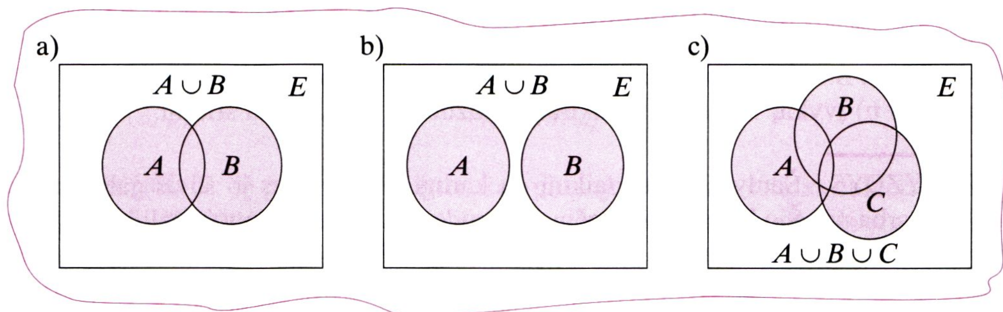
Įvykius sutapdinome su palankių jiems bandymo baigčių aibėmis. Baigčių aibes galime jungti, kirsti ir šitaip gauti naujas aibes, kurias atitinka nauji atsitiktiniai įvykiai. Sakysime, kad šie naujieji įvykiai gauti atlikus veiksmus su pradiniais įvykiais.

APIBRĖŽIMAS
Įvykių A ir B sąjunga vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro bent vienam iš įvykių A ir B palankios baigtys. Įvykių A ir B sąjungą žymėsime $A \cup B$.

Įvykių A ir B sąjungą galime apibrėžti ir taip: įvykių A ir B sąjunga yra įvykis, kuris įvyksta tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A, B.

Įvykio A ir priešingo jam įvykio sąjunga yra būtinasis įvykis.

Diagramose įvykių sąjungas vaizduojame taip pat, kaip aibių sąjungas. Pavyzdžiui, a) ir b) brėžiniuose nuspalvintos sritys vaizduoja įvykių A ir B sąjungas. Atveju a) įvykiai A ir B gali įvykti kartu, t. y. nėra nesutaikomi, o atveju b) — įvykiai A ir B yra nesutaikomi.



Galime apibrėžti ne tik dviejų, bet ir trijų, keturių ir daugiau įvykių sąjungą. Pavyzdžiui, įvykių A, B, C sąjungą $A \cup B \cup C$ galime sudaryti iš pradžių sujungę A ir B, o po to sujungę $A \cup B$ ir C. Brėžinyje c) pavaizduota trijų įvykių A, B ir C sąjunga.

1 PAVYZDYS. Bandymas — lošimo kauliuko metimas. Jo baigčių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, čia e_i žymi baigtį „atsivertė i akučių" ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Nagrinėkime įvykius $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B = \{e_2, e_3, e_4\}$, $C = \{e_3, e_4, e_5\}$. Tada $A \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $A \cup B \cup C = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Žodžiais įvykį $A \cup B$ galime nusakyti, pavyzdžiui, taip: „neatsivertė nei 5, nei 6", o įvykį $A \cup B \cup C$ — „neatsivertė 6".

1 užduotis. Įvykiai A, B ir C apibrėžti 1 pavyzdyje. Sudarykite įvykius $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{C}$, $\overline{B} \cup \overline{C}$ ir nusakykite juos žodžiais.

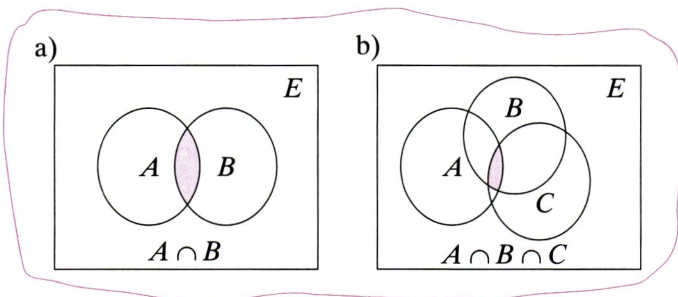
APIBRĖŽIMAS

Įvykių A ir B sankirta vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro abiems įvykiams palankios baigtys. Jeigu abiems įvykiams palankių baigčių nėra, tai įvykių sankirta yra negalimasis įvykis. Įvykių A ir B sankirtą žymėsime $A \cap B$.

Įvykių A ir B sankirtą galime apibrėžti ir taip: įvykių A ir B sankirta yra įvykis, kuris įvyksta tada, kai įvyksta abu įvykiai A ir B.

Dviejų nesutaikomų įvykių sankirta yra negalimasis įvykis.

Diagramose įvykių sankirtą vaizduojame kaip aibių sankirtą. Brėžinyje a) nuspalvinta sritis vaizduoja įvykį $A \cap B$.



Galime apibrėžti ne tik dviejų, bet ir trijų, ir daugiau įvykių sankirtas. Pavyzdžiui, įvykiui $A \cap B \cap C$ yra palankios visos tos baigtys, kurios palankios ir A, ir B, ir C. Brėžinyje b) įvykių A, B ir C sankirta pavaizduota nuspalvinta sritimi.

2 PAVYZDYS. Šaulys šauna į taikinį du kartus. Kiekvienas jo šūvis gali būti arba taiklus, arba ne. Šio bandymo baigčių aibė sudaryta iš 4 elementų ir gali būti užrašyta taip: $E = \{(t;t), (t;n), (n;t), (n;n)\}$. Čia baigtis $(t;t)$ reiškia, kad abu šūviai buvo taiklūs, $(t;n)$ — pirmasis šūvis taiklus, antrasis — ne, $(n;t)$ — pirmasis netaiklus, o antrasis — taiklus ir $(n;n)$ — abu šūviai netaiklūs. Tegu C yra įvykis, kad šaulys pataikė vieną kartą, o D — kad pirmasis šūvis buvo taiklus. Tada $C = \{(t;n), (n;t)\}$, $D = \{(t;t), (t;n)\}$, jų sankirta $C \cap D = \{(t;n)\}$ yra įvykis „pirmasis šūvis buvo taiklus, antrasis — ne“.

2 užduotis. Naudodamiesi 2 pavyzdžio įvykių C ir D apibrėžimais sudarykite įvykius $C \cap \overline{D}$, $\overline{C} \cap D$, $\overline{C} \cap \overline{D}$.

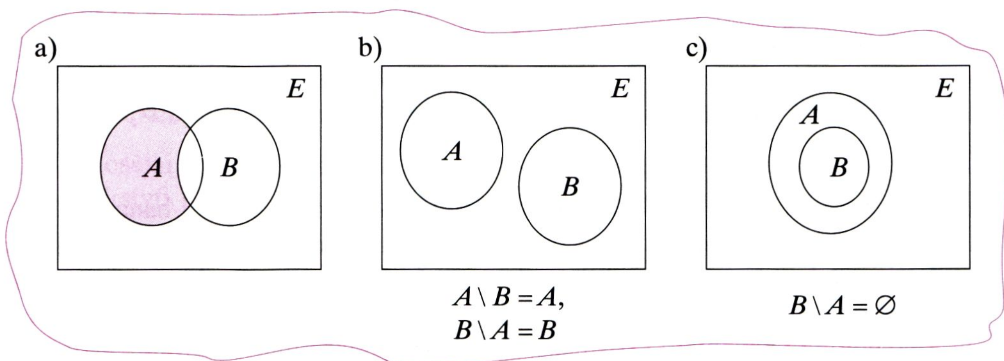
Panagrinėkime dar vieną būdą iš dviejų atsitiktinių įvykių gauti naują įvykį.

APIBRĖŽIMAS

Įvykių A ir B skirtumu vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro įvykiui A palankios, bet įvykiui B nepalankios baigtys. Įvykių A ir B skirtumas žymimas $A \setminus B$.

Įvykį $A \setminus B$ galima apibrėžti ir taip: $A \setminus B$ yra įvykis, kuris įvyksta tada, kai įvyksta A, bet neįvyksta B.

Brėžinyje a) įvykis $A \setminus B$ pavaizduotas nuspalvinta sritimi. Kai A ir B yra nesutaikomi, tai $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$, žr. brėžinį b). Gali būti, kad vienas iš įvykių $A \setminus B$, $B \setminus A$ yra negalimas įvykis. Pavyzdžiui, jei visos baigtys, kurios yra palankios įvykiui B, palankios ir įvykiui A, tai nėra nei vienos baigties, palankios B, bet nepalankios A, t. y. $B \setminus A = \varnothing$.



3 PAVYZDYS. Urnoje yra trys skaičiais 1, 2, 3 pažymėti rutuliai. Atsitiktinai vieną po kito traukiame du rutulius. Šio bandymo baigtys yra tokios:

$$e_1 = (1; 2), \quad e_2 = (1; 3), \quad e_3 = (2; 1),$$
$$e_4 = (2; 3), \quad e_5 = (3; 1), \quad e_6 = (3; 2).$$

Čia, pavyzdžiui, (2; 3) pažymėta baigtis, kad pirmojo ištraukto rutulio numeris yra 2, o antrojo — 3. Nagrinėkime tokius įvykius: A — „pirmojo rutulio numeris yra didesnis negu antrojo“, B — „antrojo rutulio numeris yra 2 arba 3“.

Tada

$$A = \{(2; 1), (3; 1), (3; 2)\}, \qquad B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3), (3; 2)\}.$$

Sudarykime įvykių skirtumus:

$$A \setminus B = \{(2; 1), (3; 1)\},$$
$$B \setminus A = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\}.$$

Žodžiais įvykį $A \setminus B$ galime nusakyti taip: „antrojo rutulio numeris yra 1“, o $B \setminus A$ — „pirmojo rutulio numeris mažesnis už antrojo rutulio numerį“.

3 užduotis. Naudodamiesi 3 pavyzdžio įvykių A ir B apibrėžimais sudarykite įvykius $A \setminus \overline{B}$, $\overline{A} \setminus \overline{B}$, $B \setminus \overline{A}$, $\overline{B} \setminus \overline{A}$. Nusakykite šiuos įvykius žodžiais.

Pratimai ir uždaviniai

15. Metamas lošimo kauliukas. Parašykite šio bandymo baigčių (elementariųjų įvykių) aibę. Įvykius A — „atsivertė ne mažiau kaip 5 akutės“ ir B — „atsivertė ne daugiau kaip 5 akutės“ užrašykite baigčių aibėmis. Užrašykite ir žodžiais apibūdinkite įvykius $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ir $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

16. Šaulys šauna į taikinį. Jis gali nepataikyti arba surinkti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 taškų. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę. Užrašykite įvykius A — „šaulys surinko ne mažiau kaip 7 taškus“, B — „nepataikė arba surinko mažiau kaip 5 taškus“ baigčių aibėmis. Užrašykite įvykius $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ir $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$. Apibūdinkite juos.

17. Iš dėžutės, kurioje yra 3 skirtingi saldainiai — abrikosinis (a), bananinis (b) ir citrininis (c), berniukas vieną po kito atsitiktinai ima du saldainius. Kokia šio bandymo baigčių aibė? Baigčių aibėmis užrašykite šiuos įvykius: A — „vienas iš berniuko paimtų saldainių yra abrikosinis“, B — „vienas iš berniuko paimtų saldainių yra bananinis“, C — „berniukas paėmė bananinį ir citrininį saldainius“. Užrašykite įvykius $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $B \setminus A$, $C \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ baigčių aibėmis ir apibūdinkite juos.

18. Geriausių klasės mokinių sąraše 4 pavardės: A. Jonaitytė, B. Petkutė, C. Kazlauskas, D. Petrauskas. Iš jų matematikos olimpiadoje gali dalyvauti tik du. Nuspręsta du atstovus pasirinkti atsitiktinai. Kokia šio bandymo baigčių aibė?
Tegu M — įvykis „į olimpiadą pateko bent viena mergaitė“, o V — „į olimpiadą pateko bent vienas berniukas“. Užrašykite įvykius $M \cup V$, $M \cap V$, $M \setminus V$, $V \setminus M$, $\overline{V}$, $\overline{M}$ baigčių aibėmis ir apibūdinkite juos.

19. Moneta metama tris kartus ir stebima, kuria puse ji atsivers pirmą, antrą ir trečią kartais. Parašykite šio bandymo baigčių aibę.
Pažymėkime A_1 — įvykį „moneta atsivertė herbu vieną kartą“, A_2 — „moneta atsivertė herbu du kartus“. Parašykite šiems įvykiams palankių baigčių aibes. Apibūdinkite įvykius $A_1 \cup A_2$ ir $A_1 \cap A_2$.

20. Dėžėje yra 4 skirtingų spalvų rutuliai — baltas, juodas, mėlynas ir raudonas. Atsitiktinai vienas po kito paimami trys rutuliai. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę ir užrašykite įvykius: A — „vienas iš paimtųjų rutulių yra baltas“, C — „vienas iš paimtųjų rutulių yra mėlynas“. Suraskite įvykius $A \cap C$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{C}$.

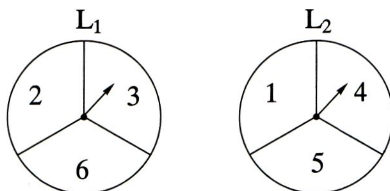
21. Iš trijų pirminių skaičių 2, 3, 5 atsitiktinai sudaromos paprastosios trupmenos $\frac{a}{b}$ ($a \neq b$). Sudarykite šio bandymo baigčių aibę. Tegu A yra įvykis, kad $\frac{a}{b} \leqslant 1{,}5$, o B — kad $\frac{a}{b} \geqslant 0{,}6$. Parašykite įvykiams A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ ir $B \setminus A$ palankių baigčių aibes.

22. Du šauliai šauna į tą patį taikinį po vieną kartą. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę. Pažymėję A įvykį „pataikė vienas šaulys“, o B — įvykį „pataikė abu šauliai“ parašykite įvykiams $\overline{A}$, $\overline{B}$ bei įvykiams $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ palankių baigčių aibes.

23. Moksleivis atlieka tokį bandymą — dalyvauja loterijoje nusipirkęs 3 loterijos bilietus. Sudarykite šio bandymo baigčių aibę. Parašykite įvykiams A — „laimėjo bent vienas bilietas“, B — „laimėjo bent du bilietai“ ir įvykiams $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ palankių baigčių aibes.

24. Iš keturių skaičių 1, 2, 3 ir 4 atsitiktinai pasirinkus du ir juos sudėjus galima gauti lyginį skaičių (įvykis A) arba nelyginį skaičių (įvykis B). Parašykite bandymo baigčių aibę ir įvykiams A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ palankių baigčių aibes.

25. Du lošėjai L_1 ir L_2 lošia po vieną kartą pasukdami kiekvienas savo ratą. Ratai suskirstyti į tris vienodo dydžio sektorius, kurie sužymėti skaičiais nuo 1 iki 6 taip:



Ratams sustojus, užrašomi sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklės, numeriai. Laimi tas lošėjas, kurio sektoriaus numeris yra didesnis.
Sudarykite šio bandymo baigčių aibę. Parašykite įvykiui A — „L_1 laimėjo prieš L_2“ palankių baigčių aibę. Kokios baigtys palankios įvykiui B — „L_1 laimėjo prieš L_2 vieno taško skirtumu“?

20. Įvykių tikimybės

20.1. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

Norėdami nagrinėti bandymą apibrėžiame jo baigtis ir sudarome jų aibę. Jeigu, pavyzdžiui, bandymas yra lošimo kauliuko metimas, tai baigtys yra šešios; jeigu bandymas — rutulio traukimas iš urnos, kurioje yra dvidešimt vienodų rutulių (galime įsivaizduoti, kad jie sunumeruoti), tai ir baigčių yra dvidešimt. Jeigu lošimo kauliukas yra simetriškas, tai, jį metus, nei viena sienelė neturi daugiau už kitas galimybių atsiversti. Sakome, kad visos tokio bandymo baigtys yra vienodai galimos. Vienodai galimos ir visos minėto rutulių traukimo iš urnos bandymo baigtys.

Jeigu kauliukas nėra simetriškas arba pagamintas iš nevienalytės medžiagos, bandymo baigtys nėra vienodai galimos.

Visiškai simetrišką lošimo kauliuką galime tik įsivaizduoti. O mėtome tikrus, iš realios medžiagos pagamintus kauliukus. Kaip patikrinti, ar teisinga manyti, kad visos realaus kauliuko metimo baigtys yra vienodai galimos?

Neginčijamai įrodyti to niekaip negalėtume. Tačiau jeigu, metus kauliuką daug kartų, visos kauliuko sienelės atvirstų maždaug po vienodai kartų, tai būtų patvirtinimas, kad visas baigtis galime laikyti vienodai galimomis.

Toliau šiame skyrelyje nagrinėsime tik tuos bandymus, kurių visos baigtys yra vienodai galimos. Jeigu A ir B yra du įvykiai, susiję su tokiu bandymu, tai daugiau galimybių įvykti turi tas įvykis, kuriam palankių baigčių yra daugiau. Sakome, kad tas įvykis yra labiau tikėtinas, arba kad jo tikimybė yra didesnė.

APIBRĖŽIMAS
Tarkime, bandymo baigčių aibė yra sudaryta iš n vienodai galimų baigčių. Jeigu įvykiui A palankių baigčių yra m, tai įvykio A tikimybe vadinamas skaičius $\frac{m}{n}$.
Žymime:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Kadangi nei viena baigtis nėra palanki negalimajam įvykiui, tai negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui. Būtinajam įvykiui palankios visos baigtys, todėl jo tikimybė lygi vienetui.
Taigi

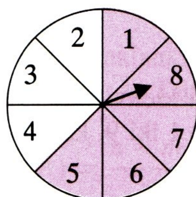
$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0, \quad \mathbf{P}(E) = 1$$

Kai bandymo baigčių yra nedaug, tai skaičiuoti įvykių tikimybes nesudėtinga.

1 PAVYZDYS. Bandymas yra lošimo kauliuko metimas. Suraskime įvykių „atvirtusių lošimo kauliuko akučių skaičius dalijasi iš 2“ ir „atvirtusių lošimo kauliuko akučių skaičius dalijasi iš 3“ tikimybes.

Pažymėkime pirmąjį įvykį raide A, antrąjį — B, o baigtį „atvirto i akučių“ — e_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Tada $A = \{e_2, e_4, e_6\}$, o $B = \{e_3, e_6\}$. Taigi $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Kadangi $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, tai pirmasis įvykis yra tikėtinesnis.

2 PAVYZDYS. Lošimo ratas suskirstytas į 8 vienodo dydžio sektorius, kaip parodyta paveikslėlyje. Kokia tikimybė, kad, ratui sustojus, rodyklė atsidurs nuspalvintame sektoriuje?



Su šiuo bandymu galime susieti aštuonias vienodai galimas baigtis $e_1, e_2, \ldots, e_8$. Baigtis e_i reiškia, kad, ratui sustojus, rodyklė atsidūrė i-ajame sektoriuje. Įvykiui, kad rodyklė atsidurs nuspalvintoje srityje, palankios penkios baigtys, taigi šio įvykio tikimybė lygi $\frac{5}{8}$.

Pratimai ir uždaviniai

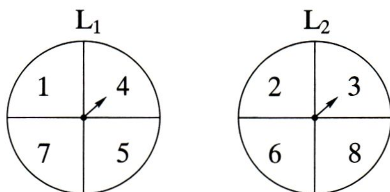
26. Vieną kartą metamas lošimo kauliukas. Apskaičiuokite tikimybę įvykio A — „atsivertė daugiau kaip 3 akutės“ ir tikimybę įvykio B — „atsivertė nelyginis akučių skaičius“. Suradę įvykiams $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ ir $B \setminus A$ palankių baigčių aibes apskaičiuokite šių įvykių tikimybes.

27. Dviejų centų moneta ir lošimo kauliukas metami kartu. Jeigu moneta atvirsta herbu, užrašomas atvirtęs kauliuko akučių skaičius. Jeigu moneta atvirsta skaičiumi, užrašomas kauliuko akučių skaičius, padidintas dvejetu. Apskaičiuokite tikimybę, kad po bandymo užrašytas skaičius bus didesnis už 2, bet mažesnis už 7.

28. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atvirtusių akučių suma bus lyginė.

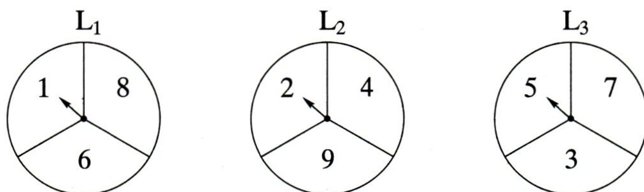
29. Metami du lošimo kauliukai ir skaičiuojama atvirtusių akučių suma. Kurio įvykio tikimybė didesnė: „gautoji suma lygi 7“ ar „gautoji suma lygi 8“?

30. Du lošėjai L_1 ir L_2 lošia po vieną kartą pasukdami kiekvienas savo ratą. Ratai suskirstyti į 4 vienodo dydžio sektorius, kurie sužymėti skaičiais nuo 1 iki 8 taip:



Laimi tas lošėjas, kurio rato rodyklė, ratui sustojus, atsiduria didesniu numeriu pažymėtame sektoriuje.
Apskaičiuokite tikimybę įvykio:
a) L_1 laimėjo prieš L_2;
b) L_1 laimėjo prieš L_2 vieno arba dviejų taškų skirtumu.

31. Trys lošėjai L_1, L_2 ir L_3 lošia po vieną kartą pasukdami kiekvienas savo ratą, kurie turi po tris lygius sektorius, sužymėtus skaičiais nuo 1 iki 9, kaip parodyta paveikslėlyje.



Ratams sustojus, lošėjai užsirašo numerius tų sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklės.
Apskaičiuokite tikimybę įvykio:
1) L_1 skaičius didesnis už L_2 skaičių;
2) L_2 skaičius didesnis už L_1 skaičių;
3) L_1 skaičius didesnis už L_3 skaičių;
4) L_3 skaičius didesnis už L_1 skaičių;
5) L_2 skaičius didesnis už L_3 skaičių.
Kurio įvykio tikimybė didžiausia?

Pirmą veikalą apie tikimybes parašė italas Džirolamo Kardanas (1500–1571). Jis buvo garsus gydytojas, matematikas, o taip pat — aistringas lošėjas. Daug pinigų per savo gyvenimą išlošęs ir dar daugiau pralošęs, jis galų gale padarė tokią išvadą: „Daugiausia naudos iš lošimų turi tie, kurie iš viso nelošia“.

20.2. Tikimybių savybės

Panagrinėkime paprasčiausias tikimybių savybes.

Jeigu bandymo baigčių aibę sudaro n vienodai galimų baigčių, o įvykiui A palankių baigčių yra m $(m \leqslant n)$, tai įvykio tikimybė lygi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Kadangi $m \leqslant n$, tai teisinga nelygybė $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

Įvykio tikimybė yra neneigiamas, ne didesnis už 1 skaičius. Negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, būtinojo — vienetui.

Jei įvykiui A palankių baigčių yra m, tai likusios $n-m$ baigtys yra palankios priešingajam įvykiui $\overline{A}$. Taigi

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \mathbf{P}(A).$$

Įvykio A ir priešingo jam įvykio $\overline{A}$ tikimybės susijusios lygybe

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) \quad \textit{arba} \quad \mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}).$$

1 PAVYZDYS. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Kokia tikimybė, kad nors kartą atsivers šešetukas?

Bandymo baigtis galime vaizduoti skaičių poromis $(i;\, j)$ $(i = 1, \ldots, 6;\ j = 1, \ldots, 6)$. Pavyzdžiui, pora $(2;\, 3)$ reiškia, kad, pirmą kartą metus kauliuką, atsivertė dvi, o antrą — trys akutės. Iš viso yra $n = 6 \cdot 6 = 36$ bandymo baigtys. Pažymėkime įvykį, kad nors kartą atsivertė šešetukas, raide A. Baigtis $(i;\, j)$ bus palanki įvykiui A, jei $i = 6$ arba $j = 6$ (arba $i = j = 6$). Galime surašyti visas bandymo baigtis ir suskaičiuoti, kiek yra baigčių, palankių A. Išspręskime uždavinį kitaip: suskaičiuokime, kiek yra baigčių, palankių priešingajam įvykiui $\overline{A}$, kuris reiškia, kad šešetukas neiškrito nei karto. Baigtis $(i;\, j)$ yra palanki $\overline{A}$, jei $i \neq 6$, $j \neq 6$. Taigi galimos i, j reikšmės yra 1, 2, 3, 4, 5. Todėl yra $5 \cdot 5 = 25$ palankios įvykiui $\overline{A}$ baigtys. Taigi

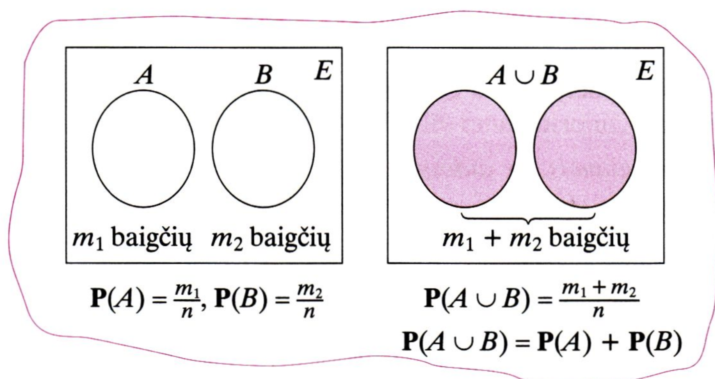
$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{25}{36}, \qquad \mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

Jeigu įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai jų sąjungos tikimybė lygi tikimybių sumai:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Iš tikrųjų, jeigu iš viso yra n vienodai galimų bandymo baigčių, o įvykiams A, B palankių baigčių yra atitinkamai m_1 ir m_2, tai įvykiui $A \cup B$ yra $m_1 + m_2$ palankių baigčių. Taigi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n}, \qquad \mathbf{P}(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$



2 PAVYZDYS. Urnoje yra 8 rutuliai. Du rutuliai balti, trys juodi, du raudoni ir vienas geltonas. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys bus arba baltas, arba geltonas?

Nors atsakymas yra kone akivaizdus, išdėstykime sprendimą taip, tarsi norėtume parodyti, jog viską kuo puikiausiai suprantame.

Įsivaizduokime, kad rutuliai yra sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 8. Bandymo baigčių aibę sudaro 8 vienodai galimos baigtys, kurias galime žymėti ištrauktų rutulių numeriais, t. y. $1, 2, \ldots, 8$. Taigi $n = 8$.

Pažymėkime A įvykį „ištrauktas baltas rutulys“, B — „ištrauktas geltonas rutulys“. Įvykiui A yra dvi palankios baigtys, įvykiui B — viena. Taigi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{8}.$$

Įvykiai A ir B nesutaikomi, o įvykis $A \cup B$ reiškia, kad ištrauktas rutulys yra baltas arba geltonas. Naudodamiesi nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės savybe gauname

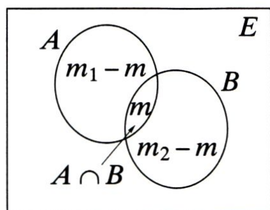
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Kai A ir B nėra nesutaikomi, t. y. gali įvykti kartu, tai lygybė $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ nėra teisinga. Šiuo atveju teisinga kiek sudėtingesnė lygybė.

Bet kokiems įvykiams A ir B teisinga lygybė

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Įrodykime šią lygybę.
Tegu iš viso yra n vienodai galimų bandymo baigčių, įvykiui A palankių baigčių yra m_1, įvykiui B — m_2, o įvykiui $A \cap B$ — m (jei A ir B yra nesutaikomi, tai $m = 0$).



Taigi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n}, \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{m}{n}.$$

Tada įvykiui $A \cup B$ yra iš viso $(m_1 - m) + m + (m_2 - m) = m_1 + m_2 - m$ palankių baigčių. Taigi

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2 - m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

3 PAVYZDYS. Nagrinėkime tą patį bandymą kaip 1 pavyzdyje. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Kokia tikimybė, kad nors kartą atsivers arba penketukas, arba šešetukas?
Bandymo baigtis vaizduokime skaičių poromis $(i; j)$, $i = 1, \ldots, 6$; $j = 1, \ldots, 6$, čia i reiškia atsivertusių akučių skaičių po pirmojo metimo, j — po antrojo. Iš viso yra $n = 6 \cdot 6 = 36$ baigtys. Pažymėkime A įvykį „nors kartą atsivertė šešetukas“, B — „nors kartą atsivertė penketukas“, C — „nors kartą atsivertė arba penketukas, arba šešetukas“. Tada $C = A \cup B$. Kadangi A ir B gali įvykti kartu, tai jie nėra nesutaikomi. Taikysime formulę

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Pirmajame pavyzdyje apskaičiavome $\mathbf{P}(A) = \frac{11}{36}$. Visiškai analogiškai galime apskaičiuoti ir įvykio B tikimybę: $\mathbf{P}(B) = \frac{11}{36}$. Įvykis $A \cap B$ įvyksta tada, kai įvyksta ir A, ir B, t. y. du kartus metus kauliuką, atsiverčia ir penketukas, ir šešetukas. Yra tik dvi baigtys, palankios $A \cap B$: (5; 6) ir (6; 5). Taigi $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ir

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{11}{36} + \frac{11}{36} - \frac{1}{18} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Užduotis. Apskaičiuokite 3 pavyzdžio įvykio C tikimybę $\mathbf{P}(C)$ kitu būdu: pasinaudokite lygybe $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C})$.

Pratimai ir uždaviniai

32. Metami du tetraedro formos lošimo kauliukai, kurių sienelės pažymėtos viena, dviem, trimis ir keturiomis akutėmis. Stebima, ant kurių sienelių kauliukai atsistos. Apskaičiuokite įvykio A — „nors vienas kauliukas atsistojo ant ketvertu pažymėtos sienelės" tikimybę dviem būdais:
1) naudodamiesi klasikiniu tikimybės apibrėžimu;
2) pritaikę priešingojo įvykio tikimybės formulę.

33. Metamos trys monetos. Apskaičiuokite įvykio A — „nors viena moneta atsivertė herbu" tikimybę dviem būdais:
1) pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą;
2) pritaikę priešingojo įvykio tikimybės formulę.

34. Dėžėje yra 10 įvairiaspalvių rutuliukų, iš kurių 4 mėlyni ir 3 žali. Iš dėžės atsitiktinai ištraukiamas vienas rutuliukas. Naudodamiesi nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės formule apskaičiuokite tikimybę ištraukti mėlyną arba žalią rutuliuką.

35. Metamas lošimo kauliukas. Pažymėkime A įvykį „atsivertė viena arba dvi akutės", B — „atsivertė penkios akutės".
Apibūdinkite žodžiais įvykį $A \cup B$ ir apskaičiuokite jo tikimybę.

36. Dviejose dėžutėse yra po tris skaičiais 1, 2, 3 sunumeruotus rutulius: pirmoje — 1 baltas ir 2 juodi, antroje — 2 balti ir 1 juodas.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Apskaičiuokite įvykio $A \cap B$ tikimybę.
b) Apskaičiuokite įvykio A ir įvykio B tikimybes.
c) Pasinaudoję įvykių sąjungos tikimybės formule apskaičiuokite $\mathbf{P}(A \cup B)$.

Didelės teorijos dažnai prasideda nuo nedidelių uždavinių. Pavyzdžiui, tikimybių teorijos raidai nemažą įtaką padarė bandymai išspręsti tokį uždavinį:
Du lošėjai paeiliui mėto simetrišką monetą. Sudėtą pinigų sumą laimi tas, kuris pirmas surinko šešis herbus. Tarkime, lošimas nutrūko, kai pirmasis turėjo penkis herbus, o antrasis — tris. Kaip pasidalyti pinigų sumą?
Būtų neteisinga visą sumą atiduoti pirmajam, juk, jei lošimas būtų tęsiamas, antrasis lošėjas irgi turėtų galimybių laimėti.
Kokias dalybas pasiūlytumėte jūs?

20.3. Pasitelkime kombinatoriką

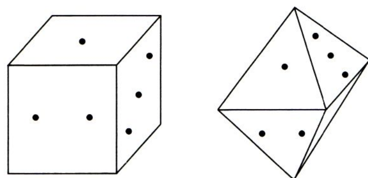
Taikant klasikinį tikimybės apibrėžimą tenka skaičiuoti, kiek yra bandymo baigčių, kiek jų yra palankių nagrinėjamam įvykiui. Dažnai bandymų baigtys vaizduojamos tam tikrų elementų (pavyzdžiui, skaičių ar simbolių) rinkiniais.

Jeigu bandymas yra du lošimo kauliuko metimai, tai tokio bandymo baigtį galime vaizduoti skaičių pora $(i; j)$, kur i, j — po pirmojo ir antrojo metimų atsivertusių akučių skaičiai. Taigi norėdami sužinoti, kiek baigčių turi toks bandymas, turime suskaičiuoti, kiek skirtingų porų galime sudaryti iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ elementų. Žinoma, šiuo atveju visas poras galime surašyti ir suskaičiuoti — jų yra 36. Tačiau kai rinkinių yra daug, visus juos rašyti ir skaičiuoti — ne geriausia išeitis. Dažniausiai rinkinių skaičių pavyksta suskaičiuoti pritaikius kokią nors kombinatorikos taisyklę ar formulę. Kombinatorika yra matematikos sritis, kurioje nagrinėjama, kaip rasti tam tikrų baigtinių aibių elementų kiekį.

Viena iš paprasčiausių, bet naudingiausių kombinatorikos taisyklių — *daugybos taisyklė.*

Jeigu pirmąjį elementą renkame iš n_1 elementų aibės, o antrąjį iš n_2 elementų aibės, tai yra $n_1 \cdot n_2$ būdų sudaryti elementų porą.

1 PAVYZDYS. Bandymas — dviejų lošimo kauliukų metimas. Pirmasis — įprastinis kubo formos lošimo kauliukas, ant jo sienų pažymėtos 1, 2, ..., 6 akutės, antrasis — oktaedro formos kauliukas, ant jo sienų pažymėtos 1, 2, ..., 8 akutės. Metus kauliukus užrašoma, kiek akučių yra ant tų sienų, ant kurių atsistojo kauliukai. Kiek baigčių turi šis bandymas?



Bandymo baigtį vaizduosime pora $(i; j)$, čia i — pirmojo kauliuko sienos akučių skaičius, j — antrojo. Taigi i yra iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o j iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. Taikydami daugybos taisyklę gauname, kad iš viso yra $n = 6 \cdot 8 = 48$ baigtys.

Daugybos taisyklę taikome ne tik tada, kai skaičiuojame elementų poras, bet ir trejetus, ketvertus ir didesnius rinkinius. Pavyzdžiui, jei pirmąjį elementą renkame iš n_1 elementų aibės, antrąjį — iš n_2 elementų aibės, trečiąjį — iš n_3 elementų aibės, tai yra $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ skirtingų būdų išrinkti elementų trejetą.

1 užduotis. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ skaitmenų?

Iš aibės, turinčios n elementų, parinkime vieną elementą, o po to — iš sumažėjusios aibės — dar vieną. Tokią porą vadiname dviejų elementų iš n gretiniu. Jeigu pirmasis elementas yra a_1, o antrasis a_2, tai dviejų elementų iš n gretinį galime užrašyti taip: $(a_1; a_2)$. Galime šitaip parinkti bet kokį skaičių k ($k \leqslant n$) elementų.

Iš aibės, turinčios n elementų, pasirinkime vieną, po to — antrą, trečią, ..., k-ąjį ($k \leqslant n$). Gautąjį elementų rinkinį vadiname k *elementų iš* n *gretiniu* (arba gretiniu iš n po k). Jeigu $a_1, a_2, \ldots, a_k$ yra pasirinktieji elementai, tai gretinį užrašysime taip: $(a_1; a_2; \ldots; a_k)$.

Pažymėkime k elementų iš n gretinių skaičių A_n^k. Apskaičiuokime šį dydį. Kai $k = 2$, tai sudarydami gretinį renkame du elementus. Pirmąjį elementą renkame iš n elementų aibės, antrąjį — iš $(n-1)$-o elemento aibės. Taigi pasinaudoję daugybos taisykle gauname, kad dviejų elementų iš n gretinių yra

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Panašiai samprotaudami gauname

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2), \qquad A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Apskritai

$$\boxed{A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)}$$

2 PAVYZDYS. Iš kortelių, ant kurių užrašyti skaitmenys 1, 3, 8, 7, 9, atsitiktinai atrenkamos trys ir sudaromas triženklis skaičius. Kiek baigčių turi toks bandymas?
Baigčių yra tiek, kiek yra 3 elementų iš 5 gretinių, taigi

$$n = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Jeigu iš n elementų aibės vieną po kito rinksime ir rikiuosime į eilę n elementų, tai pabaigę gausime n elementų iš n gretinį, t. y. tiesiog visus aibės elementus, išrikiuotus tam tikra tvarka. Tokį elementų gretinį vadinsime n *elementų kėliniu*. Iš viso n elementų kėlinių yra

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!.$$

3 PAVYZDYS. Kiek skirtingų žodžių galima sudaryti iš žodžio SAULĖ raidžių?
Skirtingų žodžių skaičius lygus 5 elementų kėlinių skaičiui, t. y.

$$A_5^5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Atrodo, iš visų jų tik vienas yra prasmingas.

Sudarydami elementų gretinį renkame elementus ir rikiuojame juos į eilę. Galime su parinktaisiais elementais elgtis kitaip — sudaryti iš jų ne eilę, bet poaibį. Įsivaizduokime, kad sudarydami poaibį dedame parinktuosius elementus, tarkime, į kokią nors dėžutę.

Aibės, turinčios n elementų, k elementų ($0 \leqslant k \leqslant n$) poaibį vadinsime k elementų iš n deriniu.
k elementų iš n derinių skaičių žymime C_n^k.

Yra tik vienas poaibis, kuriame nėra elementų — tuščia aibė; taip pat yra vienintelis aibės poaibis, turintis visus elementus — pati aibė. Taigi

$$C_n^0 = 1; \qquad C_n^n = 1.$$

Išvesime k elementų iš n derinių skaičiaus C_n^k formulę. Pradėkime nuo pavyzdžio.

4 PAVYZDYS. Tarkime $n = 4$, $k = 3$. Šiuo atveju visus k elementų iš n derinius galime surašyti. Tegu mūsų elementai yra skaičiai 1, 2, 3, 4. Iš pradžių surašykime visus derinius, o po to — iš kiekvieno derinio elementų sudarykime visus gretinius.

Elementų aibė $\{1, 2, 3, 4\}$

3 elementų iš 4 deriniai	1 2 3	1 4 2	3 4 1	3 2 4	C_4^3 derinių
3 elementų iš 4 gretiniai	(1; 2; 3)	(1; 2; 4)	(1; 3; 4)	(2; 3; 4)	A_4^3 gretinių
	(1; 3; 2)	(1; 4; 2)	(1; 4; 3)	(2; 4; 3)	
	(2; 1; 3)	(2; 1; 4)	(3; 1; 4)	(3; 2; 4)	
	(2; 3; 1)	(2; 4; 1)	(3; 4; 1)	(3; 4; 2)	
	(3; 1; 2)	(4; 1; 2)	(4; 1; 3)	(4; 2; 3)	
	(3; 2; 1)	(4; 2; 1)	(4; 3; 1)	(4; 3; 2)	
	$3! = 6$ gretiniai	$3! = 6$ gretiniai	$3! = 6$ gretiniai	$3! = 6$ gretiniai	

Iš kiekvieno 3 elementų iš 4 derinio gauname po $3! = 6$ trijų elementų iš 4 gretinius. Šitaip gauname visus gretinius. Taigi teisinga tokia lygybė

$$A_4^3 = C_4^3 \cdot 3! \quad \text{arba} \quad C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!}.$$

Šį sąryšį galime užrašyti ir taip:

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \quad \text{arba} \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3! \cdot 1!} = \frac{4!}{3!(4-3)!}.$$

Lygybės, kurias užrašėme su $n = 4$, $k = 3$, teisingos ir bendruoju atveju:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}, \quad C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{k}}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

Gretinių ir derinių skaičiaus formulės dažnai praverčia skaičiuojant įvykių tikimybes.

5 PAVYZDYS. Moksleivis, skubėdamas į varžybas, 10 savo vadovėlių, iš kurių 3 matematikos, 4 lietuvių ir 3 užsienio kalbų, sudėjo į lentyną kaip pakliuvo. Sugrįžęs vėlai, nenorėdamas degti šviesos, jis atsitiktinai paėmė 3 vadovėlius. Apskaičiuokime tikimybę, kad jis paėmė visus lietuvių kalbos vadovėlius.

Bandymas, kurį atlieka moksleivis — tai atsitiktinis trijų vadovėlių iš dešimties pasirinkimas. Vadinasi, bandymo baigčių yra tiek, kiek yra galimybių pasirinkti tris vadovėlius, t. y. kiek yra 3 elementų iš 10 derinių. Taigi

$$n = C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120.$$

Pažymėkime A įvykį, kad visi pasirinktieji vadovėliai — lietuvių kalbos. Pasirinkti tris lietuvių kalbos vadovėlius yra tiek galimybių, kiek yra 3 elementų iš 4 derinių. Taigi palankių įvykiui A baigčių skaičius yra

$$m = C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 4.$$

Tada

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

2 užduotis. Tarkime, 5 pavyzdžio moksleivis atsitiktinai paėmė ne tris, bet du vadovėlius. Kokia tikimybė, kad abu jie buvo matematikos vadovėliai; abu lietuvių kalbos vadovėliai?

Pratimai ir uždaviniai

37. Klasėje 30 moksleivių: 20 mergaičių ir 10 berniukų. Matematika domisi 12 mergaičių ir 7 berniukai. Mokytojas atsitiktinai kviečia prie lentos vieną moksleivį. Apskaičiuokite tikimybę:
1) įvykio A — „prie lentos pakviestas berniukas“;
2) įvykio B — „prie lentos pakviestas besidomintis matematika moksleivis“;
3) įvykių $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ ir $\overline{A} \cap \overline{B}$.

38. Tomas pamiršo telefono šešiaženklio numerio tris paskutiniuosius skaitmenis, todėl renka juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad jis teisingai surinks telefono numerį?

39. Lagamino kodą sudaro lotynų abėcėlės, kurioje yra 26 raidės, raidė ir trys skaitmenys. Apskaičiuokite tikimybę atidaryti lagaminą atsitiktinai surinkus raidę ir tris skaitmenis.

40. Eismo įvykio liudytojas įsidėmėjo nuvažiavusio iš autoįvykio vietos automobilio valstybinio numerio raides ir tai, kad tarp numerio skaitmenų nėra nulio. Apskaičiuokite tikimybę atspėti nuvažiavusio automobilio valstybinį numerį.

41. Atskirose kortelėse surašytos raidės A, B, C, I, Y, K, M, N, O, S. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai paėmę 7 korteles ir jas sudėję į eilę perskaitysime žodį M O K I N Y S.

42. Iš 6 moksleivių su skirtingais vardais mokytojas atsitiktinai prie lentos kviečia tris mokinius. Apskaičiuokite tikimybę, kad mokytojas prie lentos pirmiausia pakvies Agnę, po to Joną ir galiausiai Laurą.

43. Atskirose kortelėse surašytos raidės E, Ė, I, K, L, M, O, S, V. Kokia tikimybė šias raides atsitiktinai sudėjus į eilę gauti žodį M O K S L E I V Ė?

44. Keturios draugės Agnė, Giedrė, Justė ir Saulė atėjusios į kino teatrą, paprastai sėdasi atsitiktine tvarka į gretimas vietas. Kokia tikimybė, kad jos susės abėcėlės tvarka?

45. Žinoma, kad septynženklis telefono numeris užrašomas skaitmenimis 1, 3, 5. Be to, skaitmuo 1 numeryje pasikartoja tris kartus, o skaitmenys 3 ir 5 — po 2 kartus. Kokia tikimybė atspėti telefono numerį?

46. Ant stalo — 10 kortelių su raidėmis A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Šios raidės atsitiktinai sudedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį M A T E M A T I K A?

47. Aštuonios skirtingos knygos, iš kurių dvi matematinės, atsitiktinai sudedamos į vieną lentyną. Apskaičiuokite tikimybę, kad matematinės knygos bus padėtos greta.

48. Dėžėje prie kasos yra dviejų spalvų balionai — 10 raudonų ir 6 žali. Pirkėjas atsitiktinai renkasi 5 balionus. Kokia tikimybė, kad jis nusipirks 3 raudonus ir 2 žalius balionus?

49. Iš dėžės, kurioje yra m baltų ir $n-m$ juodų rutulių, atsitiktinai traukiama k rutulių. Apskaičiuokite tikimybę, kad tarp ištrauktųjų rutulių bus r baltų ($r \leqslant m$ ir $r \leqslant k$).

50. Duotos 4 atkarpos, kurių ilgiai yra 2 cm, 5 cm, 6 cm ir 10 cm. Iš jų atsitiktinai pasirenkamos trys. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš pasirinktųjų atkarpų galima sudėti trikampį.

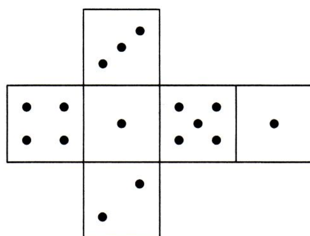
20.4. Bendrasis įvykio tikimybės apibrėžimas

Jeigu yra n vienodai galimų bandymo baigčių, tai kiekvienos iš jų pasirodymo tikimybė lygi $\frac{1}{n}$. Visų bandymo baigčių tikimybių suma lygi 1, t. y. lygi būtinojo įvykio tikimybei.

Tačiau ne visada visos bandymo baigtys yra vienodai galimos. Pavyzdžiui, moneta gali būti sulankstyta, lošimo kauliukas nesimetriškas ir t. t.

Norėdami skaičiuoti atsitiktinių įvykių, susijusių su tokiais bandymais, tikimybes iš pradžių turime nustatyti, kam lygios elementariųjų įvykių, t. y. bandymo baigčių, tikimybės. Jos gali būti skirtingos, tačiau jų suma turi būti lygi vienetui, t. y. būtinojo įvykio tikimybei.

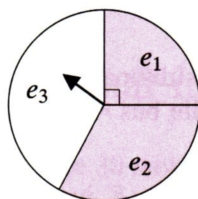
1 PAVYZDYS. Tarkime, lošimo kauliukas yra simetriškas, tačiau jo sienelės pažymėtos kitaip, nei įprasta, žr. brėžinį.



Metus kauliuką, gali atsiversti viena, dvi, trys, keturios arba penkios akutės. Pažymėkime šias baigtis e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ir sudarykime iš jų bandymo baigčių aibę $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Baigtis e_1 turi dvigubai daugiau už kitas galimybių pasirodyti, taigi šios baigties tikimybė yra dvigubai didesnė. Todėl bandymo baigčių tikimybės yra tokios:

$$\mathbf{P}(e_1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(e_2) = \mathbf{P}(e_3) = \mathbf{P}(e_4) = \mathbf{P}(e_5) = \frac{1}{6}.$$

2 PAVYZDYS. Lošimo ratas padalytas į tris sektorius, kaip parodyta brėžinyje.



Pirmasis sektorius užima $\frac{1}{4}$ viso skritulio, o antrasis ir trečiasis — po pusę likusios dalies. Taigi šie sektoriai užima po $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ skritulio. Ratui nustojus suktis, rodyklė gali atsidurti viename iš trijų sektorių. Pažymėkime šias baigtis e_1, e_2, e_3, taigi baigčių

aibė $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Kadangi baigčių tikimybės turi būti proporcingos atitinkamų sektorių plotams, tai

$$\mathbf{P}(e_1) = \frac{1}{4}x, \qquad \mathbf{P}(e_2) = \frac{3}{8}x, \qquad \mathbf{P}(e_3) = \frac{3}{8}x.$$

Kaip žinome, visų baigčių tikimybių suma turi būti lygi vienetui, todėl gauname:

$$\mathbf{P}(e_1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}(e_2) = \mathbf{P}(e_3) = \frac{3}{8}.$$

Dabar apibrėšime bet kokio įvykio tikimybę tuo atveju, kai bandymo baigtys yra nebūtinai vienodai galimos.

APIBRĖŽIMAS
Tegu $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yra visų bandymo baigčių aibė, o $\mathbf{P}(e_1), \mathbf{P}(e_2), \ldots, \mathbf{P}(e_n)$ šių baigčių tikimybės:

$$\mathbf{P}(e_1) > 0, \ldots, \mathbf{P}(e_n) > 0, \qquad \mathbf{P}(e_1) + \mathbf{P}(e_2) + \cdots + \mathbf{P}(e_n) = 1.$$

Įvykio A tikimybe vadiname įvykiui A palankių baigčių tikimybių sumą ir žymime ją $\mathbf{P}(A)$.

Pavyzdžiui, jeigu A yra įvykis, kad, 2 pavyzdžio laimės ratui sustojus, rodyklė atsidurs nuspalvintoje srityje, tai $A = \{e_1, e_2\}$ ir

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(e_1) + \mathbf{P}(e_2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

Jeigu visos bandymo baigtys $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yra vienodai galimos, tai

$$\mathbf{P}(e_1) = \mathbf{P}(e_2) = \ldots = \mathbf{P}(e_n) = \frac{1}{n}.$$

Jei atsitiktinis įvykis turi m jam palankių baigčių, tai pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$. Tą pačią tikimybės reikšmę gauname ir skaičiuodami pagal bendrąjį tikimybės apibrėžimą:

$$\mathbf{P}(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m} = \frac{m}{n}.$$

Surasti bandymo baigčių tikimybes ne visada taip paprasta, kaip mūsų pavyzdžiuose. Įsivaizduokime, kad mėtome lošimo kauliuką. Norėtume skaičiuoti su jo metimu susijusių atsitiktinių įvykių tikimybes, tačiau žinome, kad kauliukas nesimetriškas, taigi klasikinio apibrėžimo taikyti negalime. Kaip surasti baigčių tikimybes? Galima

tokia išeitis. Meskime kauliuką daugybę kartų ir skaičiuokime, kiek kartų atsivertė viena, dvi, trys ir t. t. akutės. Tegu N yra metimų skaičius, o $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ baigčių $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ pasirodymo skaičiai (e_i žymi baigtį, kad atsivertė i akučių). Sudarykime santykius:

$$\frac{N_1}{N}, \quad \frac{N_2}{N}, \quad \frac{N_3}{N}, \quad \frac{N_4}{N}, \quad \frac{N_5}{N}, \quad \frac{N_6}{N}.$$

Šie santykiai vadinami baigčių $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ pasirodymo santykiniais dažniais. Visų jų suma lygi vienetui, nes $N_1 + N_2 + \cdots + N_6 = N$.
Kai metimų skaičius N yra didelis, santykiniai dažniai nedaug skiriasi nuo baigčių $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ tikimybių, kurių nežinome. Taigi skaičiuodami su bandymu susijusių įvykių tikimybes nedaug apsiriksime naudodamiesi lygybėmis:

$$\mathbf{P}(e_1) = \frac{N_1}{N}, \qquad \mathbf{P}(e_2) = \frac{N_2}{N}, \qquad \mathbf{P}(e_3) = \frac{N_3}{N},$$
$$\mathbf{P}(e_4) = \frac{N_4}{N}, \qquad \mathbf{P}(e_5) = \frac{N_5}{N}, \qquad \mathbf{P}(e_6) = \frac{N_6}{N}.$$

Pakartoję tą patį bandymą N kartų galime apskaičiuoti ne tik baigčių, bet ir kitų su bandymu susijusių atsitiktinių įvykių santykinius dažnius. Jeigu, atlikus bandymą N kartų, įvykis A įvyko M kartų, tai įvykio santykiniu dažniu vadiname skaičių $\frac{M}{N}$. Jeigu bandymų skaičius N yra didelis, tai santykinis dažnis mažai skiriasi nuo įvykio tikimybės:

$$\mathbf{P}(A) \approx \frac{M}{N}.$$

3 PAVYZDYS. Iš prekybos centro apskaitos duomenų žinoma, kad maždaug 30% darbo dienų parduodamos duonos kiekis k mažesnis už 200 kg, 40% — ne mažesnis už 200, bet mažesnis už 300, 20% — ne mažesnis už 300, bet mažesnis už 400, 10% — didesnis už 400 kg. Kokia tikimybė, kad eilinę darbo dieną bus parduota ne mažiau kaip 200 kilogramų duonos?
Kas gi yra šio pavyzdžio bandymas? Tai prekybos centro veikla nuo ryto iki vakaro, t. y. visą dieną. Susiekime su šiuo bandymu keturias baigtis: e_1 — „parduotos duonos kiekis k tenkina nelygybę $k < 200$“, e_2 — „parduotos duonos kiekis k tenkina nelygybę $200 \leqslant k < 300$“, e_3 — „parduotos duonos kiekis k tenkina nelygybę $300 \leqslant k < 400$“, e_4 — „parduotos duonos kiekis k tenkina nelygybę $k > 400$“.
Pažymėkime raide A įvykį „per dieną parduota ne mažiau kaip 200 kg duonos“. Tada $A = \{e_2, e_3, e_4\}$ ir

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(e_2) + \mathbf{P}(e_3) + \mathbf{P}(e_4).$$

Baigčių tikimybių nežinome, todėl vietoj jų imkime santykinius dažnius, apskaičiuotus iš prekybos centro duomenų:

$$\mathbf{P}(e_2) = 0{,}4, \qquad \mathbf{P}(e_3) = 0{,}2, \qquad \mathbf{P}(e_4) = 0{,}1.$$

Taigi tikimybė, kad prekybos centras per dieną parduos ne mažiau kaip 200 kilogramų duonos, apytiksliai lygi

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}7.$$

Kai visos bandymo baigtys yra vienodai galimos, atsitiktinių įvykių tikimybes apibrėžiame naudodamiesi klasikiniu apibrėžimu, kai nėra vienodai galimos — bendruoju apibrėžimu. Tačiau tikimybių savybės yra tos pačios. Prisiminkime jas.

Įvykio tikimybė yra neneigiamas, ne didesnis už vienetą skaičius.
Negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, būtinojo — vienetui.
Įvykio A ir priešingojo jam įvykio $\overline{A}$ tikimybės susijusios lygybe

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}).$$

Jei A ir B nesutaikomi įvykiai, tai

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Bet kokiems įvykiams teisinga lygybė

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Skyrelyje 20.2. šias savybes įrodėme tuo atveju, kai visos bandymo baigtys yra vienodai galimos.

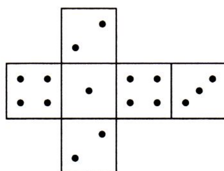
Tikraisiais tikimybių teorijos pradininkais laikomi du prancūzų matematikai — Pjeras Ferma (1601 – 1665) ir Blezas Paskalis (1623 – 1662). P. Ferma gyveno Tulūzoje, o B. Paskalis — Paryžiuje. Abu jie vienodai išsprendė uždavinį apie nebaigto lošimo išlošio pasidalijimą.
Tiesa, pasirodo yra ta pati ir Tulūzoje ir Paryžiuje!

Pratimai ir uždaviniai

51. Tikimybė parduotuvėje per dieną parduoti prekių ne daugiau kaip už 1000 Lt lygi 0,3; tikimybė parduotuvėje parduoti prekių daugiau negu už 1000 Lt, bet mažiau negu už 2000 Lt lygi 0,4. Apskaičiuokite tikimybę:
a) per dieną parduoti prekių ne mažiau kaip už 2000 Lt;
b) per dieną parduoti prekių mažiau kaip už 2000 Lt.

52. Tikimybė, kad prekybos centras per dieną gaus 1 užsakymą, lygi 0,15; 2 užsakymus — 0,45; 3 užsakymus — 0,1.
Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) rytoj bus gauti daugiau negu 2 užsakymai;
b) rytoj bus gautas bent vienas užsakymas;
c) rytoj bus gauti mažiau negu 3 užsakymai.

53. Lošimo kauliuko sienelės sužymėtos, kaip pavaizduota paveikslėlyje.



Kokia tikimybė, kad, metus šį lošimo kauliuką, iškris:
a) lyginis akučių skaičius; b) nelyginis akučių skaičius?

54. Tikimybė:
1) kad atpigs pirmosios įmonės akcijos, lygi 0,5;
2) kad atpigs antrosios įmonės akcijos, lygi 0,4;
3) kad atpigs abiejų įmonių akcijos, lygi 0,3.
Apskaičiuokite tikimybę, kad atpigs bent vienos iš įmonių akcijos.

55. Tikimybė:
1) kad pabrangs pirmosios įmonės akcijos, lygi 0,25;
2) kad pabrangs antrosios įmonės akcijos, lygi 0,55;
3) kad pabrangs bent vienos įmonės akcijos, lygi 0,7.
Apskaičiuokite tikimybę, kad pabrangs abiejų įmonių akcijos.

56. Įvykio A tikimybė yra 0,6, o įvykio B tikimybė — 0,7. Kokiam skaičių intervalui priklauso:
a) įvykio $A \cap B$ tikimybė; b) įvykio $A \cup B$ tikimybė?

57. Maisto produktų parduotuvėje 50% pirkėjų perka mėsos produktus, 70% pirkėjų — žuvies produktus, 40% — ir mėsos, ir žuvies produktus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinis pirkėjas nepirks nei mėsos, nei žuvies produktų.

58. Apie 80% Lietuvos poilsiautojų atostogauja Lietuvos pajūryje, apie 30% — užsienio kurortuose, apie 15% pabuvoja ir Lietuvos pajūryje, ir užsienio kurorte. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas Lietuvos poilsiautojas neatostogaus nei Lietuvos pajūryje, nei užsienio kurortuose?

21. Sąlyginė tikimybė

21.1. Sąlyginės tikimybės apibrėžimas

Kartais bandymui dar nepasibaigus, jau žinome, kad tam tikri įvykiai įvyko.

1 PAVYZDYS. Urnoje yra penki skaičiais 1, 2, 3, 4, 5 pažymėti rutuliai. Pirmasis iš urnos atsitiktinai ištraukia rutulį Algis, po to — Birutė. Jeigu ištraukto rutulio numeris 1, 2 arba 3 — lošėjas laimi prizą, jeigu 4 arba 5 — nelaimi nieko.

Bandymas pasibaigia, kai Algis ir Birutė ištraukia po rutulį. Taigi bandymo baigtį galime vaizduoti skaičių pora $(i; j)$, čia i — Algio ištraukto rutulio numeris, j — Birutės ($i = 1, \dots, 5$; $j = 1, \dots, 5$, $i \neq j$).

Pažymėkime A įvykį „Algis laimėjo prizą", B — „Birutė laimėjo prizą". Kadangi Algis traukia rutulį pirmas, tai ar A įvyko, ar neįvyko, paaiškės dar iki bandymo pabaigos. Šio įvykio tikimybę taip pat visai paprasta apskaičiuoti:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{5}.$$

Įvykio B tikimybės taip paprastai nesurasime. Pirmiausia, turime sužinoti, kiek yra iš viso bandymo baigčių, t. y. dviejų elementų iš penkių gretinių:

$$n = 5 \cdot 4 = 20.$$

Dabar apskaičiuokime, kiek yra baigčių, palankių įvykiui B, t. y. įvykiui, kad Birutė laimės prizą. Baigtis $(i; j)$ bus palanki įvykiui B, jei $j = 1, 2$ arba 3. Baigčių su $j = 1$ yra keturios, su $j = 2$, $j = 3$ irgi po keturias. Taigi baigčių, palankių įvykiui B, yra

$$m = 4 + 4 + 4 = 12,$$

o įvykio B tikimybė

$$\mathbf{P}(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Nors Birutė rutulį traukia po Algio, tikimybė, kad ji laimės prizą, yra tokia pati, kaip Algio!

Abiejų įvykių tikimybes skaičiavome dar prieš bandymą. O dabar, tarkime, bandymas jau prasidėjo: Algis ištraukė savo rutulį. Tarkime, jis neparodė, koks jo rutulio numeris, tačiau Birutė vis tiek sužinojo (galbūt iš Algio veido išraiškos), kad Algis laimėjo. Taigi, bandymui dar nepasibaigus, jau žinoma, kad įvykis A įvyko.

Prieš traukdama savo rutulį Birutė gali iš naujo apskaičiuoti savo tikimybę laimėti. Kadangi Algis laimėjo, tai galimos bandymo baigtys yra tokios: $(1;\ j)$, $(2;\ j)$, $(3;\ j)$. Tokių baigčių yra $n = 12$. Iš jų palankios įvykiui B yra šešios:

$$(1; 2), \quad (1; 3), \quad (2; 1), \quad (2; 3), \quad (3; 1), \quad (3; 2).$$

Taigi sužinojusi, kad Algis laimėjo, Birutė savo tikimybę laimėti skaičiuoja taip: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Tikimybė $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}$ apskaičiuota neturint jokių žinių apie bandymo eigą, o antrą kartą skaičiuodami to paties įvykio tikimybę pasinaudojome tuo, kad įvykis A jau įvyko. Todėl pastaroji tikimybė vadinama *sąlygine*. Ją žymime taip: $\mathbf{P}(B|A)$; skaitome — įvykio B tikimybė su sąlyga, kad A įvyko. Taigi

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}, \qquad \mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{2}.$$

1 užduotis. Naudodamiesi 1 pavyzdžio įvykių A ir B apibrėžimais apskaičiuokite sąlyginę tikimybę $\mathbf{P}(B|\overline{A})$, t. y. tikimybę Birutei laimėti prizą su sąlyga, kad Algis nieko nelaimėjo.

Apžvelkime, kaip sąlyginę tikimybę skaičiavome 1 pavyzdyje, dar kartą. Visas bandymo baigtis surašykime į lentelę, pažymėkime baigtis, palankias įvykiams A ir B.

E

(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)
(2; 1)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)
(3; 1)	(3; 2)	(3; 4)	(3; 5)
(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 5)
(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)

A

$A \cap B$

B

Įvykio B tikimybę su sąlyga, kad įvyko įvykis A, reiškėme skaičiaus baigčių, palankių abiems įvykiams, ir skaičiaus baigčių, palankių įvykiui A, santykiu:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Sąlyginę tikimybę $\mathbf{P}(B|A)$ galime išreikšti tikimybėmis, apskaičiuotomis neatsižvelgiant į jokias sąlygas, t. y. besąlyginėmis tikimybėmis. Kadangi

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{6}{20}, \qquad \mathbf{P}(A) = \frac{12}{20},$$

tai

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{6}{12} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{12}{20}} \doteq \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Šia lygybe sąlyginė tikimybė apibrėžiama bendruoju atveju.

APIBRĖŽIMAS
Tegu A, B — atsitiktiniai įvykiai, $\mathbf{P}(A) > 0$. Įvykio B sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis A, vadiname skaičių

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

2 PAVYZDYS. Moksleivis, atsivertęs matematikos vadovėlį, kartais jį užverčia nieko nedaręs; kartais šiek tiek paskaito, kartais sprendžia uždavinius. Pastebėta, kad maždaug 70% kartų, kai jis atsiverčia vadovėlį, tai ir skaito; 40% — ir skaito, ir sprendžia uždavinius. Tarkime, atsivertęs vadovėlį, moksleivis pradėjo jį skaityti. Kokia tikimybė, kad po to jis dar ir spręs uždavinius?

Pažymėkime A įvykį „moksleivis, atsivertęs vadovėlį, jį skaitė“, B — „moksleivis sprendė uždavinius“. Tada $A \cap B$ yra įvykis, kad moksleivis ir skaitė, ir sprendė uždavinius. Žinome, kad įvykis A įvyko, reikia apskaičiuoti tikimybę $\mathbf{P}(B|A)$. Pagal sąlyginės tikimybės apibrėžimą gauname

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Nors tikimybių $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$ nežinome, turime tam tikrus stebėjimų duomenis. Naudodamiesi jais galime apskaičiuoti įvykių A ir $A \cap B$ santykinius dažnius ir naudoti juos vietoj nežinomų tikimybių:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{70}{100} = 0{,}7, \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{40}{100} = 0{,}4.$$

Tada

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}.$$

Uždavinį išsprendėme nesusimąstę, koks šiuo atveju yra bandymas ir jo baigtys. Tiesiog žinodami vienų įvykių tikimybes apskaičiavome mums rūpimo įvykio tikimybę. Vis dėlto: kas yra šiame uždavinyje bandymas ir kokios jo baigtys?

Bandymas, aišku, prasideda, kai moksleivis atsiverčia vadovėlį, o baigiasi — kai užverčia. Surašykime visus jo elgesio atvejus:

- neskaitė ir nesprendė;
- neskaitė, bet sprendė;
- skaitė, bet nesprendė;
- skaitė ir sprendė.

Šie skirtingi moksleivio elgesio būdai ir yra mūsų bandymo baigtys!

2 užduotis. Tarkime, 2 pavyzdžio moksleivis, atsivertęs vadovėlį, iškart pradėjo spręsti uždavinius. Kokia tikimybė, kad jis vadovėlį dar ir skaitys, jeigu jis uždavinius sprendžia maždaug 85% kartų, kai tik atsiverčia vadovėlį?

Pratimai ir uždaviniai

59. Iš dėžės, kurioje yra 5 balti ir 8 juodi rutuliai, atsitiktinai išimtas rutulys yra baltas. Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę, kad antras išimtas rutulys bus:
a) baltas; b) juodas.

60. Iš 15 egzamino bilietų moksleivis neišmoko penkto, dešimto ir penkiolikto bilietų. Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę ištraukti bilietą, kurį moksleivis išmoko, su sąlyga, kad anksčiau egzaminą laikę moksleiviai ištraukė aštuntą, dešimtą ir vienuoliktą bilietus.

61. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę, kad ant bent vieno iš kauliukų atsivers 5 akutės su sąlyga, kad abiejų kauliukų akučių suma didesnė už 9.

62. Tikimybė, kad rytoj bus debesuota, lygi 0,5. Jeigu diena debesuota, tikimybė, kad lis, lygi 0,7. Kokia tikimybė, kad rytoj bus debesuota ir lis?

Nurodymas. Pritaikykite formulę $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A)$.

---

63. Tikimybė įsigyti nekokybišką prekę lygi 0,1. Tikimybė įsigijus nekokybišką prekę pakeisti ją kokybiška yra 0,8. Kokia tikimybė, kad pirkėjas įsigis nekokybišką prekę ir ją pakeis kokybiška?

64. Gydytojai žino, kad skirtingų ligų požymiai gali būti tokie patys. Tikimybė, kad žmogui bus aptiktas požymis A, lygi 0,3. Tikimybė sirgti liga L, kai nustatytas požymis A, yra 0,9. Apskaičiuokite tikimybę, kad žmogus turės požymį A ir sirgs liga L.

21.2. Nepriklausomi įvykiai

Prisiminkime pirmąjį ankstesniojo skyrelio pavyzdį. Urnoje yra penki skaičiais 1, 2, 3, 4, 5 pažymėti rutuliai. Algis ir Birutė atsitiktinai ištraukia po rutulį, Algis traukia rutulį pirmas. Jeigu ištrauktojo rutulio numeris yra 1, 2 arba 3 — laimimas prizas, jei 4, 5 — nelaimima nieko. Nagrinėjome du įvykius: A — „Algis laimėjo prizą", B — „Birutė laimėjo prizą". Prieš bandymą apskaičiavome įvykio B tikimybę: $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{5}$. Bandymui prasidėjus, sužinojome, kad Algiui pasisekė, t. y. įvyko įvykis A. Tada apskaičiavome sąlyginę įvykio B tikimybę: $\mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{2}$. Matome, kad $\mathbf{P}(B) \neq$ $\neq \mathbf{P}(B|A)$, t. y. Birutės sėkmė priklauso nuo to, pasisekė ar nepasisekė Algiui. Kitaip tariant — įvykis B priklauso nuo įvykio A. Jeigu lošimas vyktų šiek tiek kitaip — ištraukęs rutulį ir parodęs jo numerį Algis vėl grąžintų jį į urną, Birutės galimybės laimėti nepriklausytų nuo to, įvyko ar neįvyko įvykis A. Taigi įvykiai A ir B būtų nepriklausomi ir būtų teisingos lygybės:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A),$$
$$\mathbf{P}(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)},$$
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Trečiąja lygybe patogu naudotis apibrėžiant du nepriklausomus įvykius bendruoju atveju.

APIBRĖŽIMAS
Įvykius A ir B vadiname nepriklausomais, jei

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Jeigu įvykiai A ir B yra nepriklausomi ir $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$, tai iš lygybės

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

gauname:

$$\frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A), \qquad \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B),$$

arba

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A), \qquad \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B).$$

Taigi jeigu A ir B yra nepriklausomi, tai vienam jų įvykus, galimybių įvykti kitam nei padidėja, nei sumažėja.

Ar įvykiai A ir B nepriklausomi ar priklausomi, kartais nusprendžiame nepatikrinę apibrėžimo lygybės. Dažnai nagrinėjame bandymus, sudarytus iš kelių etapų arba dalių. Pavyzdžiui, monetą metame du arba daugiau kartų, vienas po kito į taikinį šauna du šauliai ir t. t. Kartais galima daryti prielaidą, kad tie bandymo etapai nedaro įtakos vienas kitam, atliekami nepriklausomai vienas nuo kito. Tada įvykius, susijusius tik su atskirais bandymo etapais, laikome nepriklausomais. Pavyzdžiui, įvykiai „metus monetą pirmą kartą, iškrito skaičius“ ir „metus monetą antrą kartą, iškrito herbas“ yra nepriklausomi. Įvykius „pirmas šaulys pataikė“ ir „antras šaulys pataikė“ taip pat teisinga laikyti nepriklausomais.

1 PAVYZDYS. Kartu metami moneta ir tetraedro formos lošimo kauliukas, kurio sienelės sužymėtos skaičiais 1, 2, 3 ir 4. Pažymėkime A — įvykį, kad moneta atsivertė herbu, o B — įvykį, kad tetraedras nukrito ant sienelės su nelyginiu numeriu. Apskaičiuokime įvykio $A \cap B$ tikimybę.

Pagal bandymo sąlygas įvykiai A ir B yra nepriklausomi:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B).$$

Todėl

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Užduotis. Pirmojo pavyzdžio bandymo baigtis galime vaizduoti poromis $(i; H)$, $(i; S)$, čia i — tetraedro sienelės, ant kurios jis atsistojo, akučių skaičius, H — herbas, S — skaičius ant monetos pusių. Naudodamiesi klasikiniu tikimybės apibrėžimu apskaičiuokite $\mathbf{P}(A \cap B)$.

2 PAVYZDYS. Du šauliai vienu metu nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Taikinys sunaikinamas, kai bent vienas iš šaulių pataiko. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė yra 0,9, o antrojo — 0,8. Apskaičiuokime taikinio sunaikinimo tikimybę.
Pažymėję A — įvykį, kad pataikys pirmasis šaulys, B — įvykį, kad pataikys antrasis, turime apskaičiuoti įvykio $A \cup B$ tikimybę. Pasinaudokime lygybe

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Kadangi įvykiai A ir B nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Pratimai ir uždaviniai

65. Kartu metami moneta ir lošimo kauliukas. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsivers herbas ir nelyginis akučių skaičius.

66. Statybos firma langų rėmus ir stiklus perka iš dviejų tarpusavyje nesusijusių įmonių. Tikimybė, kad lango rėmas turės defektą, lygi 0,05, o tikimybė, kad stiklas bus brokuotas, yra 0,04. Kokia tikimybė, kad ir lango rėmas, ir stiklas bus kokybiški?

67. Lošiant loterijoje *A*, tikimybė išlošti įsigijus vieną bilietą yra 0,01, o loterijos *B* laimingo bilieto tikimybė 0,02. Apskaičiuokite tikimybę, kad, įsigijus po vieną abiejų loterijų bilietą, išloš bent vienas.

68. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent vienas iš jų atsivers lyginiu akučių skaičiumi?

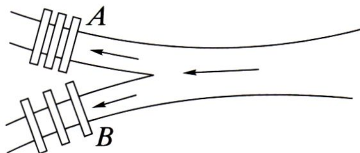
69. Įmonėje dirba tarpusavyje nesusietos dvejos staklės. Tikimybė, kad pirmosios staklės per darbo dieną nesuges, yra 0,9, o antrosios — 0,8. Kokia tikimybė, kad per darbo dieną:
a) nesuges nė vienerios staklės;
b) suges abejos staklės;
c) bent vienerios staklės nesuges;
d) suges vienerios staklės?

70. Loterijos ratą pasukus vieną kartą, laimima su tikimybe 0,1. Pasukus ratą du kartus, galima:
a) laimėti abu kartus;
b) nelaimėti nė karto;
c) laimėti vieną kartą;
d) laimėti bent vieną kartą.
Apskaičiuokite išvardytųjų įvykių tikimybes.

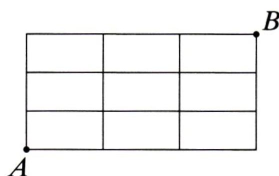
71. Krepšininkas meta du baudos metimus. Pirmąjį baudos metimą pataiko su tikimybe 0,9, o antrąjį — su tikimybe 0,95. Apskaičiuokite tikimybę, kad krepšininkas:
a) pataikys abu baudos metimus;
b) pataikys bent vieną;
c) pataikys vieną;
d) nepataikys nė vieno baudos metimo.

22. Kartojimo uždaviniai

1. Keliais būdais iš vietovės A galima nukeliauti į vietovę B ir sugrįžti atgal į A, neinant per tą patį tiltą du kartus?



2. Kiek kelių yra iš taško A į tašką B, jeigu judama tik aukštyn ir dešinėn nubrėžtomis linijomis?



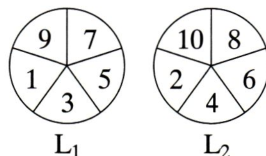
3. Iš raidžių A, B, C ir D, jas sumaišius, tris kartus atsitiktinai imama po vieną raidę, kiekvieną paimtąją raidę grąžinant atgal. Kokia tikimybė visus tris kartus paimti tą pačią raidę?

4. Apskaičiuokite tikimybę, kad 5 moksleivių grupėje bent du moksleiviai švenčia savo gimtadienį tą patį mėnesį.

5. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atvirtusių akučių suma bus nelyginė.

6. Du lošėjai L_1 ir L_2 lošia po vieną kartą pasukdami kiekvienas savo ratą. Ratai suskirstyti į 5 vienodo dydžio sektorius, pažymėtus skaičiais 1, 2, 3, ..., 10. Apskaičiuokite tikimybes:

a) kad L_1 laimės prieš L_2;
b) kad L_2 laimės prieš L_1;
c) kad L_2 laimės prieš L_1 vieno taško persvara.



7. Iš 7 pažymėtų apskritimo taškų atsitiktinai pasirenkami keturi taškai: A, B, C ir D. Apskaičiuokite tikimybę, kad stygos AB ir CD susikirs.

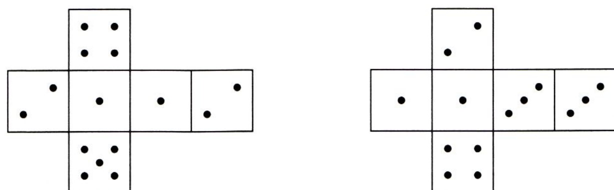
8. Naudojant skaitmenis 1, 2, 3, 4 ir 5 atsitiktinai sudaromas dviženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad sudarytasis skaičius lyginis?

9. Dėžėje yra 6 balti ir 8 juodi rutuliai. Atsitiktinai išimami 2 rutuliai.

1) Kokia tikimybė, kad abu rutuliai balti?
2) Apskaičiuokite įvykių A — „abu išimti rutuliai yra vienodos spalvos“ ir B — „abu išimti rutuliai yra skirtingų spalvų“ yra labiau tikėtinas?

10. Penki matematinės enciklopedijos tomai atsitiktinai sustatomi lentynoje. Kokia tikimybė, kad pirmasis ir antrasis tomai bus padėti greta vienas kito?

11. Dviejų lošimo kauliukų sienelės sužymėtos, kaip parodyta paveikslėlyje:



Kokia tikimybė, kad, metus šiuos abu kauliukus, iškritusių akučių suma bus: a) lyginė; b) nelyginė?

12. Tikimybė, kad šaulys pataikys į „dešimtuką“, lygi 0,2, kad pataikys į „devintuką“ — 0,3, o tikimybė, kad šaulys gaus nuo 1 iki 9 taškų (įskaitant 9) lygi 0,7. Apskaičiuokite tikimybę, kad šaulys:

a) nepataikys; b) gaus ne mažiau kaip 9 taškus.

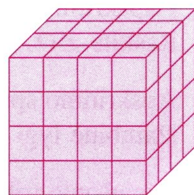
13. Iš penkių 3 cm, 4 cm, 7 cm, 8 cm ir 9 cm ilgio atkarpų atsitiktinai parenkamos trys. Apskaičiuokite:

a) tikimybę, jog iš jų galima sudėti trikampį;
b) tikimybę, jog iš jų galima sudėti smailųjį trikampį;
c) tikimybę, jog iš jų galima sudėti bukąjį trikampį;
d) sąlyginę tikimybę, kad trikampis bukasis, jeigu žinoma, jog trikampį galima sudėti.

14. Nudažytas kubas supjaustytas į 64 vienodo didumo kubelius. Juos sumaišius atsitiktinai išimamas vienas.

1) Apskaičiuokite tikimybę, kad šis kubelis:

   a) bus nenudažytas;
   b) turės vieną nudažytą sienelę;
   c) turės dvi nudažytas sieneles;
   d) turės tris nudažytas sieneles;
   e) turės bent vieną nudažytą sienelę.



2) Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę, kad paimtasis kubelis turės lygiai vieną nudažytą sienelę, jeigu žinoma, kad jis turi nudažytų sienelių.

15. Du draugai nusipirko po automobilį. Tikimybė, jog per pirmuosius metus pirmojo automobilis suges, yra 0,9, antrojo — 0,8. Apskaičiuokite tikimybę, kad per pirmuosius metus:
a) suges abu draugų automobiliai;
b) suges bent vienas automobilis;
c) nesuges nė vienas automobilis.

16. Tikimybė, kad birželio mėnesio diena bus lietinga, lygi 0,4. Tikimybė, kad po lietingos dienos seks lietinga, yra 0,7. Kokia tikimybė, kad dvi iš eilės birželio mėnesio dienos bus lietingos?

Geometrijos uždaviniai

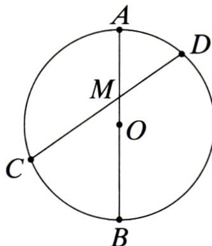
17. Kampas tarp apskritimo stygos ir skersmens lygus $30°$. Styga dalija skersmenį į 5 cm ir 13 cm ilgio atkarpas. Raskite atstumą nuo apskritimo centro iki stygos.

18. Per apskritimo tašką B nubrėžtos dvi tarpusavyje statmenos stygos AB ir BC. Apskritimo centro O atstumas iki tų stygų lygus 6 cm ir 8 cm. Apskaičiuokite trikampio ABC perimetrą ir plotą.

19. Dvi apskritimo liestinės statmenos viena kitai. Stygos, jungiančios lietimosi taškus, ilgis lygus 10 cm. Raskite atstumą nuo apskritimo centro iki stygos.

20. Styga AB dalija apskritimą į du lankus: $\smile AMB : \smile ANB = 7 : 11$. Raskite įbrėžtinių kampų, kurie remiasi į tuos lankus, didumus.

21. Duota: AB — skersmuo,
CD — styga,
$\angle AMD = 55°$,
$\smile AD = 30°$.
Rasti: $\smile AC$.



22. Atstumai nuo apskritimo skersmens galų iki tiesės, liečiančios apskritimą, yra 16 cm ir 10 cm. Apskaičiuokite apskritimo skersmenį.

23. Į apskritimą, kurio centras O, įbrėžtas trikampis ABC. Kampas B lygus $65°$. Raskite $\angle OAC$.

24. Apskritimo spindulys lygus 5 cm. Apie šį apskritimą apibrėžto stataus trikampio įžambinė lygi 25 cm. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

25. Lygiašonio trikampio ABC šoninėse kraštinėse nuo jo viršūnės B atidėtos lygios atkarpos BM ir BN. Atkarpos AN ir CM susikerta taške O. Įrodykite, kad į keturkampį $BMON$ galima įbrėžti apskritimą.

26. Vienetinio apskritimo centras O. Ant apskritimo pažymėti trys taškai A, B, C, dalijantys apskritimą į tris lygias dalis.
Apskaičiuokite $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$.

27. Apskaičiuokite vektorių $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ skaliarinę sandaugą, kai:

a) $\vec{m}(-1; 1{,}8)$, $\vec{n}(4; 5)$;
b) $\vec{m}(\sqrt{2}; -6)$, $\vec{n}(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$;
c) $\vec{m}(-3; 0)$, $\vec{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}\right)$;
d) $\vec{m} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{n} = 4\vec{i} - 2{,}5\vec{j}$.

28. Dviem būdais (pertvarkydami kaip algebrinius reiškinius ir taikydami vektorių, išreikštų koordinatėmis, skaliarinės sandaugos teoremą) apskaičiuokite skaliarinę sandaugą:
a) $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 4\vec{j})$; b) $(-3\vec{i} - 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 5\vec{j})$.

29. Raskite kampą α tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kai:

a) $\vec{a}(2; -3)$, $\vec{b}(6; 4)$;
b) $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(-1; 3)$;
c) $\vec{a}(0; -1)$, $\vec{b}(1; -\sqrt{3})$;
d) $\vec{a}(3\sqrt{3}; 3)$, $\vec{b}(-4; 0)$.

30. Kokį kampą su Ox ašimi sudaro vietos vektorius:
a) $\vec{a}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $\vec{b}(-1; -1)$?

31. Apskaičiuokite trikampio ABC kampus, kai duotos jo viršūnių koordinatės:
a) $A(0; 6)$, $B(6\sqrt{3}; 0)$, $C(-6\sqrt{3}; 0)$;
b) $A(0; -5)$, $B(-6; 6\sqrt{3} - 5)$, $C(-6; -5)$.

Įvairūs uždaviniai

32. Raskite funkcijos reikšmių sritį:

a) $f(x) = 2^{1-3\sin^2 x}$;
b) $f(x) = 3^{\cos x+1}$;
c) $f(x) = 2^{|\cos x|}$;
d) $f(x) = 2^{1-\sin^2 x}$;
e) $f(x) = 5^{|\sin x|}$;
f) $f(x) = 5^{1-\sin x}$.

33. Raskite reiškinio apibrėžimo sritį:
a) $y = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{4})+1}$; b) $y = \frac{5}{\cos(x-\frac{\pi}{3})-1}$.

34. Išspręskite nelygybę:
a) $\sin(3x - 1) > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
b) $\mathrm{tg}(x + \sqrt{3}) < -\sqrt{3}$.

35. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma randama pagal formulę:
a) $S_n = 4n^2 + 12n$; b) $S_n = 3n^2 + n$.
Raskite progresijos skirtumą.

36. Iš dviejų taškų, tarp kurių atstumas 55,5 m, tuo pačiu metu vienas priešais kitą ima judėti du kūnai. Pirmasis — per pirmąją sekundę nueina 30 dm, o per kiekvieną sekančią jis nueina 5 dm daugiau, negu per praėjusią. Antrasis — per pirmąją sekundę nueina 60 dm, o per kiekvieną sekančią 4 dm mažiau, negu per praėjusią. Po kiek sekundžių kūnai susitiks?

37. Raskite sumą:
a) $0,11 + 0,0011 + 0,000011 + \cdots$;
b) $3,017 + 3,000017 + 3,000000017 + \cdots$.

38. Ant švaraus popieriaus lapo užtiško riebalų lašas. Riebalams geriantis į popierių apvali riebalų dėmė plėtėsi. Dėmės spindulys, praėjus t sekundžių po to, kai ji atsirado, buvo $r(t) = \frac{1+5t}{2+t}$ centimetrų.
a) Apskaičiuokite dėmės spindulį pradiniu laiko momentu $t = 0$.
b) Per kiek laiko nuo dėmės atsiradimo jos spindulys padvigubėjo?
c) Įrodykite, kad riebalų dėmės spindulys $r(t) < 5$, kai $t \geqslant 0$.

39. Dviejuose priešinguose kubo formos dėžutės kampuose tupi voras ir musė. Voras nori nukeliauti iki musės. Dėžutės pagrindo kraštinės ilgis lygus 10 cm. Koks trumpiausiojo kelio, kurį gali pasirinkti voras, ilgis?

40. Kiek valandų pavėluos laikrodis per savaitę, jei:
a) jis pavėluoja 1 minutę per vieną valandą;
b) jis pavėluoja 2 minutes per vieną valandą;
c) jis pavėluoja 1 minutę per kiekvienas 2 valandas?

41. Kiek daugiausia medinių rutuliukų, kurių spindulys 15 mm, galima įdėti į kubinę dėžutę, kurios tūris lygus 216 cm^3?

V Plokštumos geometrija

23. Kaip prasideda geometrija
23.1. Pradinės sąvokos ir aksiomos 142
23.2. Taškai, tiesės, atkarpos 143
23.3. Kampai 145
23.4. Figūros 147

24. Trikampiai ir tiesės
24.1. Lygiašonis trikampis 151
24.2. Trikampių lygumo požymiai 152
24.3. Trikampių lygumo požymių taikymas 154
24.4. Lygiagrečios tiesės 157
24.5. Lygiagrečių tiesių savybių taikymas 161
24.6. Trikampių panašumas 167
24.7. Kampų ir kraštinių sąryšiai trikampyje 170
24.8. Trikampio ploto formulės 174

25. Daugiakampiai
25.1. Iškilieji ir neiškilieji daugiakampiai 177
25.2. Lygiagretainis ir jo savybės 179
25.3. Stačiakampis, rombas ir kvadratas 182
25.4. Trapecija 185

26. Apskritimas ir skritulys
26.1. Apskritimo stygos ir liestinės 188
26.2. Apskritimai ir daugiakampiai 192
26.3. Taisyklingieji daugiakampiai 196
26.4. Apskritimo ilgis ir skritulio plotas 199



23. Kaip prasideda geometrija

Šioje vadovėlio dalyje dėstoma plokštumos geometrija. Dauguma jos teiginių jums jau yra žinomi. Taigi ši dalis yra tarsi jau nagrinėtų temų santrauka, žinynas, kurį sklaidant galima prisiminti primirštą formulę ar teoremą. Yra dar vienas svarbus dalykas, kurį primena šios dalies puslapiai: matematika yra ne šiaip sau per daugelį amžių įvairių tautų sukurta žinių sritis, bet griežtai loginiais ryšiais į visumą susietų sąvokų ir teiginių sistema. Teisę būti joje įgyja tik tie teiginiai, kurie yra įrodyti. Įrodymai yra tarsi laipteliai, vedantys nuo vienų teiginių prie kitų.
Galbūt pereiti jais kai kam bus visų įdomiausia.

23.1. Pradinės sąvokos ir aksiomos

Plokštumos geometrija, arba planimetrija, tyrinėja plokštumos figūras. Kokias figūras? Kas apskritai yra figūra? Nuo ko pradėti jas tyrinėti? Atsakyti į šiuos klausimus nėra taip paprasta.

Pirmąjį nuoseklaus matematinių žinių dėstymo pavyzdį daugiau kaip prieš 2 tūkstančius metų savo veikale „Pradmenys" pateikė graikų matematikas Euklidas. Jo dėstymo principai tapo kone pačia matematikos savastimi. Jais remiantis dėstomos ne tik geometrijos, bet ir kitų matematikos sričių žinios.

Pirmiausia ne apibrėžiami, bet tiesiog išvardijami pradiniai objektai, kurie laikomi paprasčiausiais, lengvai suvokiamais. Geometrijoje šie pradiniai objektai yra paprasčiausios figūros — taškas, tiesė. Tiesa, Euklidas „Pradmenyse" stengiasi apibrėžti ir juos, tačiau pateikia veikiau ne apibrėžimus, bet paaiškinimus, kaip reikia tuos pradinius objektus suvokti. Pavyzdžiui, Euklidas tašką nusako taip: „taškas yra tai, kas neturi dalių".

Išvardijus pradinius objektus reikia nusakyti paprasčiausius, lengvai suvokiamus jų sąryšius.

Pavyzdžiui, geometrijoje taško ir tiesės sąryšį apibūdiname žodžiais: taškas priklauso (nepriklauso) tiesei. Arba — kitaip: tiesė eina (neina) per tašką.
Įvedus pagrindines sąvokas dėstomi paprasti ir akivaizdūs teiginiai, vadinami iš graikų kalbos skolintu žodžiu — aksioma. Šie teiginiai į sistemą priimami be įrodymo. Žinoma, tokių teiginių stengiamasi priimti kuo mažiau. Kita vertus, jų negali būti ir per mažai, kitaip jais remdamiesi nedaug ką galėtume įrodyti. Euklido „Pradmenyse" tokių aksiomų yra keturiolika; jas jis sugrupavo į dvi grupes: teiginius apie geometrijos figūras ir bendresnio pobūdžio teiginius (pavyzdžiui, „lygūs tam pačiam yra lygūs tarpusavyje").

Jeigu tai atlikta — išvardyti pagrindiniai objektai, sąryšiai ir aksiomos — pagrindas teorijos dėstymui padėtas. Kitaip tariant — sukurta aksiomatika. Naudojantis išvardytomis sąvokomis galima apibrėžti naujas sąvokas, formuluoti teiginius, juos įrodinėti. Įrodyti teiginį reiškia išvesti jį logiškai samprotaujant iš aksiomų ir anksčiau įrodytų teiginių.

Iki pat XIX amžiaus geometrija dėstyta naudojantis Euklido sukurta aksiomatika! Tik šio amžiaus matematikai pradėjo įžvelgti joje trūkumų ir netikslumų. Geometrijos aksiomatika buvo kritiškai įvertinta, patikslinta ir pertvarkyta. Kita vertus, buvo sukurtos kitokios geometrijos aksiomatikos. Juk, pavyzdžiui, net pradines figūras galima išvardyti įvairiai. Galima pradinėmis figūromis laikyti tašką ir tiesę, o atkarpą apibrėžti; galima pradinėmis figūromis pavadinti tašką ir atkarpą, o tiesę apibrėžti. Galima išdėstyti geometriją pradiniu objektu laikant vektorių.

Taigi nuosekliai dėstant geometriją reikia priimti jos aksiomatiką ir remiantis ja apibrėžti kitas sąvokas, formuluoti teiginius ir juos įrodinėti, net ir visai akivaizdžius. Tai nėra lengva. Todėl elgsimės papraščiau. Kartais akivaizdžius teiginius priimsime be įrodymo, nors jie ir nėra aksiomos. Ir viso aksiomų sąrašo nepateiksime, paminėsime tik pačias svarbiausias.

23.2. Taškai, tiesės, atkarpos

Taškai ir tiesės — pradinės plokštumos geometrijos figūros. Jeigu duotas taškas ir tiesė, visada galime nustatyti, ar tiesė eina per tašką.

AKSIOMA
Per bet kuriuos du taškus galime nubrėžti vienintelę tiesę.

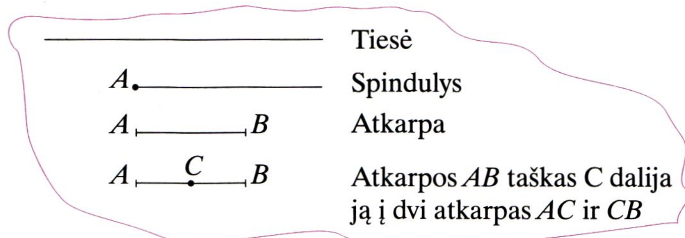
Taigi per bet kuriuos du taškus eina tik viena tiesė. Jeigu yra taškas, priklausantis dviem duotom tiesėm, sakome, kad šios tiesės kertasi šiame taške. Jeigu tokio plokštumos taško nėra — sakome, kad tiesės lygiagrečios. Dvi tiesės gali kirstis tik vieninteliame taške.

AKSIOMA
Bet kuris tiesės taškas dalija ją į dvi dalis.

Jeigu prie vienos iš tų dalių prijungsime patį tašką, gausime spindulį (arba pustiesę). Patį tašką vadiname spindulio pradžia.

Jeigu A, B, C yra trys tos pačios tiesės taškai, visada galime pasakyti, kuris taškas yra tarp kitų dviejų.

Figūrą, kurią sudaro taškai A, B ir visi tiesės, einančios per A ir B, taškai, esantys tarp A ir B, vadiname atkarpa. Ją žymime AB, taškus A, B vadiname atkarpos galais. Bet kuris atkarpos AB taškas, esantis tarp taškų A ir B, dalija ją į dvi atkarpas.

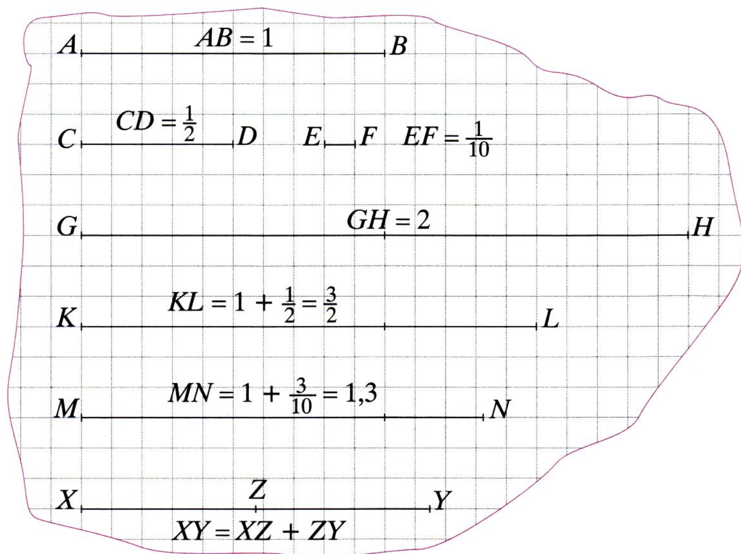


Labai svarbu, kad kiekvienai atkarpai galime priskirti teigiamą skaičių, reiškiantį jos ilgį.

Pasirinkus atkarpą ir priskyrus jai skaičių 1 *kiekvienai kitai atkarpai galima priskirti teigiamą skaičių, kurį vadiname jos ilgiu.*

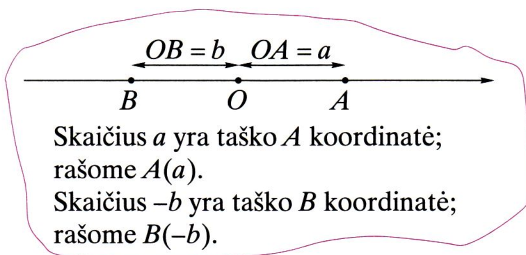
Svarbiausia atkarpų ilgio savybė yra tokia: jeigu atkarpą padalysime į dvi atkarpas, tai gautųjų atkarpų ilgių suma bus lygi pradinės atkarpos ilgiui.

Pasirinktąją atkarpą vadiname matavimo vienetu. Atkarpa AB yra geometrinė figūra, o jos ilgis — skaičius, dažnai žymimas $|AB|$. Tačiau paprastai painiavos neatsiranda atkarpos ilgį žymint taip pat, kaip ir atkarpą, t. y. AB.



Naudodamiesi atkarpos ilgio sąvoka apibrėžiame atstumą tarp bet kurių dviejų plokštumos taškų: atstumu tarp plokštumos taškų A, B vadiname atkarpos AB ilgį.
Ilgio sąvoka naudojamės apibrėždami tiesės taškų koordinates.

Pasirinkę tiesėje koordinačių pradžios tašką O taško A, esančio dešiniau taško O, *koordinate* vadiname atkarpos OA ilgį; taško B, esančio kairiau taško O, koordinate — skaičių, lygų atkarpos OB ilgiui, paimtam su minuso ženklu.



Yra dar viena svarbi aksioma apie tieses, kuria dažnai remiamasi.

AKSIOMA
Per tašką, nepriklausantį duotai tiesei, galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę, lygiagrečią duotajai.

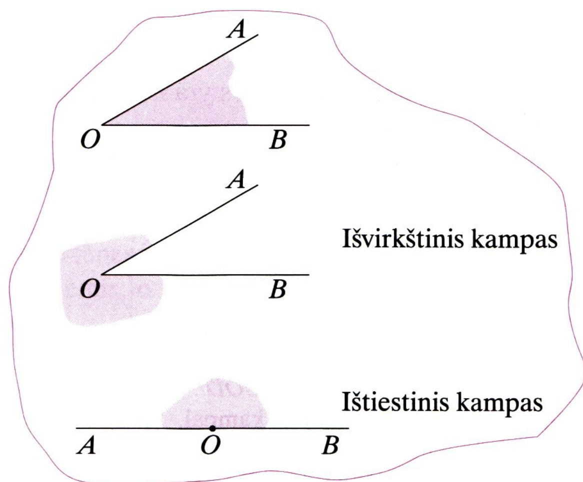
Taigi jei per tašką, esantį šalia tiesės, nubrėžtos dvi kitos tiesės, tai viena jų, o gal ir abi kerta duotąją tiesę.

Ši aksioma turi savo istoriją. Matematikai nuo Euklido laikų bandė įrodyti ją remdamiesi kitomis aksiomomis, t. y. bandė išbraukti ją iš aksiomų sąrašo. Tik XIX amžiuje nustatyta, kad įrodyti jos neįmanoma.

23.3. Kampai

Plokštumos dalį, kurią riboja du iš vieno taško išeinantys spinduliai, vadiname kampu. Bendrąjį spindulių pradžios tašką vadiname kampo viršūne, o spindulius — kampo kraštinėmis. Tiesa, nurodžius kampo viršūnę ir kraštines lieka neaišku, apie kurią iš dviejų kraštinėmis apribotų plokštumos sričių kalbama. Kai kampo kraštinės nėra vienoje tiesėje, susitarkime nagrinėti tą kampą, kuris, pratęsus bet kurią kampo kraštinę iki tiesės, lieka vienoje tiesės pusėje. Kitą kampą su tomis pačiomis kraštinėmis vadiname išvirkštiniu.

Kai kampo kraštinės yra vienoje tiesėje, kampą vadiname ištiestiniu.



Kampą, kurio viršūnė O, o kraštinės OA ir OB, žymime $\angle AOB$.

Jeigu iš to kampo viršūnės O nubrėšime spindulį OC, kuris eis tarp spindulių OA ir OB, kampą $\angle AOB$ padalysime į du kampus: $\angle AOC$ ir $\angle COB$.

Kaip ir atkarpas, kampus galime matuoti.

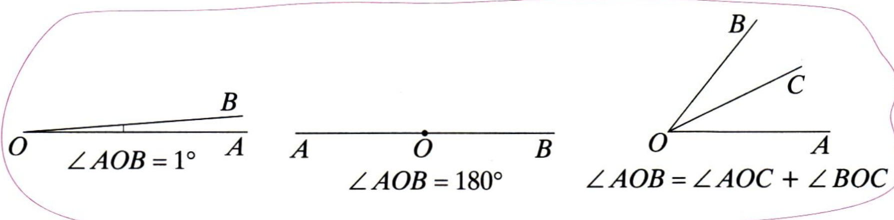
Pasirinkus kampą ir priskyrus jam skaičių 1 *kiekvienam kitam kampui galima priskirti teigiamą skaičių, kurį vadiname to kampo didumu.*

Įprasta kampų matavimo vienetu pasirinkti $\frac{1}{180}$ ištiestinio kampo dalį, ją vadiname laipsniu.

Taigi ištiestinio kampo didumas laipsniais yra 180, rašome 180°.

Nors kampas ir jo didumas ne vienas ir tas pats, paprastai juos žymime vienodai, pvz., $\angle AOB$ gali reikšti ir kampą, ir jo didumą.

Svarbiausia kampų didumų savybė yra tokia: jeigu kampą spinduliu, nubrėžtu iš kampo viršūnės, padalysime į du kampus, tai šių kampų didumų suma bus lygi pradinio kampo didumui.



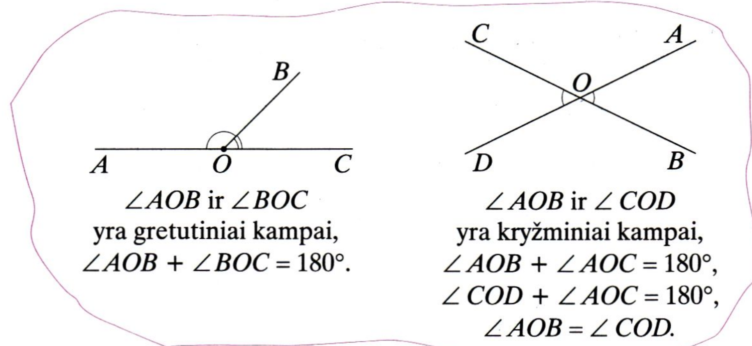
Kai kampo didumas laipsniais mažesnis už 90, kampą vadiname smailiuoju, kai lygus 90 — stačiuoju, kai daugiau už 90, bet mažiau už 180 — bukuoju.

Jei du kampai turi vieną bendrą kraštinę, o kitos dvi kraštinės yra vienoje tiesėje, tai tuos du kampus vadiname gretutiniais.

Sudėję gretutinius kampus gauname ištiestinį kampą.

Jeigu du kampai turi bendrą viršūnę, o vieno kampo kraštinės yra kito kampo kraštinių tęsiniuose, tai tokie kampai vadinami kryžminiais.

Nesudėtinga įrodyti, kad kryžminių kampų didumai yra lygūs, žr. brėžinį.



Spindulį (arba tiesiog atkarpą), dalijantį duotąjį kampą pusiau, vadiname kampo pusiaukampine.

Kampą sudaro du spinduliai, išeinantys iš vieno taško. Dažnai sakome, kad atkarpos, turinčios bendrą galo tašką, taip pat sudaro kampą.

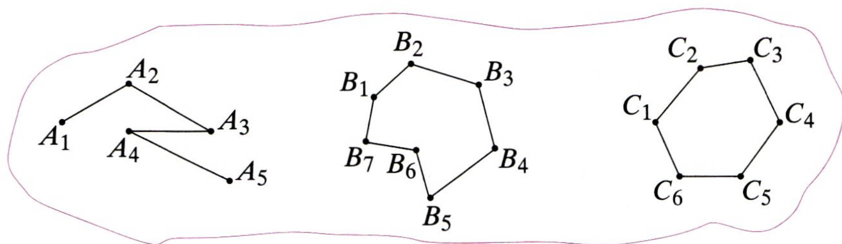
23.4. Figūros

Taškai, tiesės, atkarpos, kampai — paprasčiausios plokštumos geometrijos figūros. Figūrą nusako jos taškai. Apibrėžiant naują figūrą nurodoma, kokie taškai jai priklauso.

APIBRĖŽIMAS
Laužte vadinama figūra $A_1A_2A_3...A_n$, sudaryta iš taškų A_1, A_2, A_3, ..., A_n ir juos jungiančių atkarpų A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$. Tie taškai vadinami laužtės viršūnėmis, o atkarpos — laužtės grandimis.

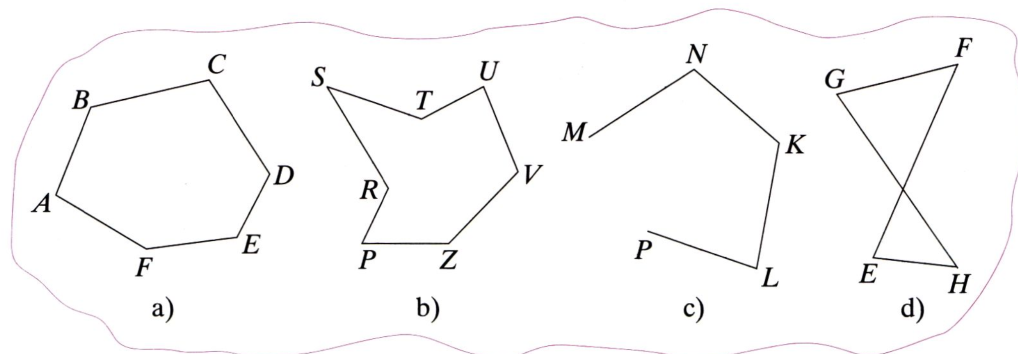
Mes nagrinėsime *paprastąsias* laužtes, t. y. laužtes, kurių gretimos grandys nėra vienoje tiesėje, o negretimos — neturi bendrų taškų.

Brėžinyje pavaizduota paprastoji laužtė $A_1A_2A_3A_4A_5$. Laužtė, kurios galai sutampa, vadinama *uždarąja*. Brėžinyje pavaizduotos laužtės $B_1B_2...B_7B_1$ ir $C_1C_2C_3...C_6C_1$ yra uždarosios.



APIBRĖŽIMAS
Baigtinė plokštumos dalis, kurią riboja paprastoji uždaroji laužtė, vadinama daugiakampiu. Laužtės taškai laikomi taip pat priklausančiais daugiakampiui.

Laužtės viršūnės vadinamos daugiakampio viršūnėmis, laužtės grandys — daugiakampio kraštinėmis, o kampai, kuriuos sudaro gretimos laužtės grandys — daugiakampio kampais.



Brėžiniuose a) ir b) pavaizduoti daugiakampiai $ABCDEF$ ir $PRSTUVZ$. Brėžiniuose c) ir d) pavaizduotos figūros nėra daugiakampiai, nes c) atveju laužtė $MNKLP$ nėra uždara, o d) atveju laužtė $EFGH$ kerta pati save.

Paprasčiausias daugiakampis yra trikampis. Tai plokštumos dalis, apribota tris grandis turinčia uždarąja laužte. Laužtės viršūnes vadiname trikampio viršūnėmis, laužtės grandis — trikampio kraštinėmis.

Kartais trikampiu vadinama pati laužtė, t. y. sakoma, kad trikampį sudaro trys atkarpos, jungiančios tris taškus, nesančius vienoje tiesėje.

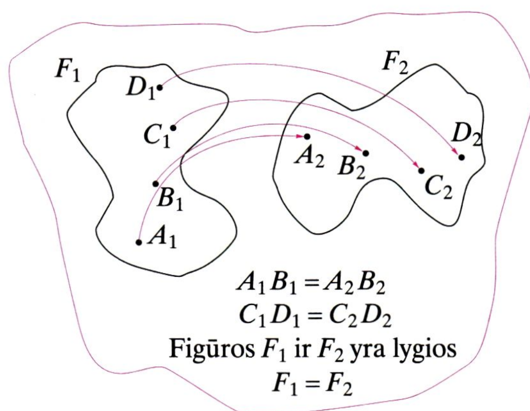
Plokštumos geometrija nagrinėja ne tik daugiakampius.
Pavyzdžiui, dvi svarbios figūros — apskritimas ir skritulys apibrėžiamos taip.

APIBRĖŽIMAS
Apskritimu vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško, vadinamo apskritimo centru.
Atkarpą, jungiančią apskritimo centrą su bet kuriuo jo tašku, vadiname apskritimo spinduliu.
Skrituliu vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, nutolę nuo vieno taško (skritulio centro) atstumu, ne didesniu už duotąjį.

Skritulį galime apibrėžti ir kitaip: tai baigtinė plokštumos dalis, apribota apskritimu.
Aptarkime figūrų lygumo sąvoką. Nors intuityviai gerai jaučiame, kokias figūras dera laikyti lygiomis, apibrėžti šią sąvoką nėra paprasta.

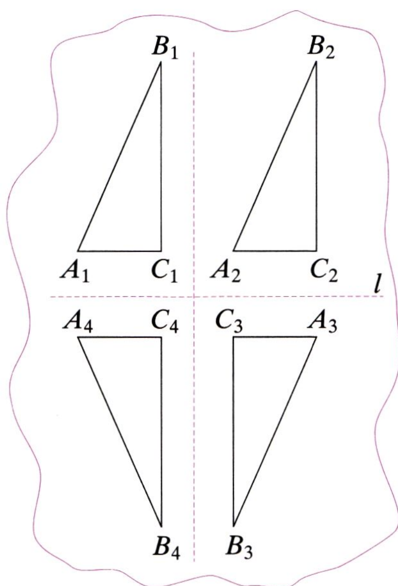
Geometrinę figūrą nusako jos taškai. Taigi dviejų figūrų lygumo sąvoką galime apibrėžti naudodamiesi figūrų taškų atitiktimi.

Figūras F_1 ir F_2 vadiname lygiomis, jei tarp F_1 ir F_2 taškų galima nurodyti tokią atitiktį, kad jei F_1 taškus A_1 ir B_1 atitinka F_2 taškai A_2, B_2, tai $A_1B_1 = A_2B_2$.



Patogu vietoj „galima nurodyti taškų atitiktį..." sakyti paprastai: „galima figūrą F_1 uždėti ant figūros F_2, kad jos sutaptų".

Panagrinėkime įsivaizduojamą „uždėjimo“ veiksmą nuodugniau. Brėžinyje pavaizduoti keturi lygūs trikampiai.



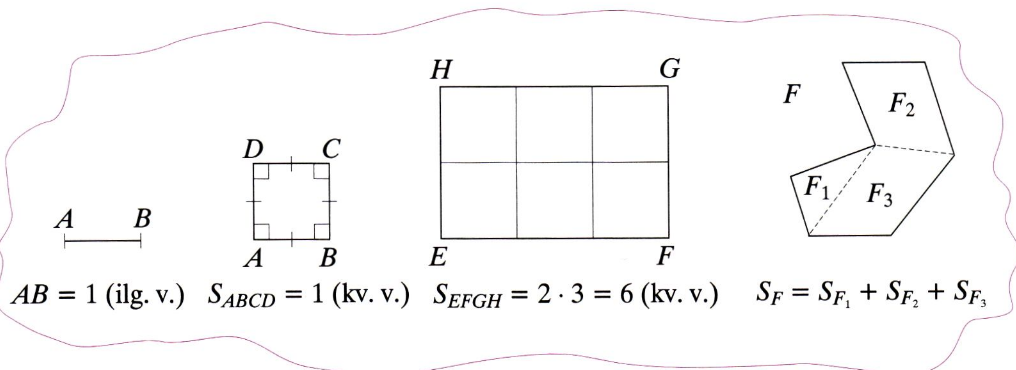
Trikampį $A_1B_1C_1$ galima sutapdinti su trikampiu $A_2B_2C_2$, jeigu jį pastumsime taip, kad kampas A_1 sutaptų su kampu A_2. Kad sutapdintume trikampį $A_1B_1C_1$ su trikampiu $A_3B_3C_3$, turime trikampį $A_1B_1C_1$ ne tik pastumti, bet ir pasukti. Tačiau kad ir kaip stumdytume ir sukiotume trikampį $A_1B_1C_1$, jo nesutapdinsime su trikampiu $A_4B_4C_4$. Trikampį $A_1B_1C_1$ sutapdinsime su trikampiu $A_4B_4C_4$ tik tuomet, kai trikampį $A_1B_1C_1$ „apversime“, kitaip tariant — atvaizduosime simetriškai tiesės l atžvilgiu.

Taigi lygių trikampių „sutapdinimą uždedant“ galime vaizduotis sudarytą iš postūmio, posūkio ir apvertimo judesių. Tai teisinga ne tik lygiems trikampiams, bet ir bet kokioms lygioms figūroms.

Atkarpą apibūdiname jos ilgiu, kampą — jo didumu laipsniais, panašiai figūros „didumą“ apibūdiname nurodydami jos plotą. Figūrų įvairovė yra didesnė negu atkarpų ar kampų, tad ir ploto sąvoką sudėtingiau apibrėžti negu atkarpų ilgio ar kampų didumo. Apsiribosime vien bendrųjų šios sąvokos savybių išvardijimu:

- *figūros plotas yra teigiamas skaičius*;
- *kvadrato, kurio kraštinių ilgiai būtų lygūs* 1, *plotas lygus* 1;
- *lygių figūrų plotai yra lygūs*;
- *jei figūra yra padalyta į kelias dalis, tai jos plotas lygus tų dalių plotų sumai.*

Ploto matavimo vienetu galime laikyti vienetinį kvadratą. Jei figūrą galima sudaryti iš tam tikro skaičiaus vienetinių kvadratų, tai jos plotas lygus tų kvadratų skaičiui. Pavyzdžiui, stačiakampį, kurio kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai a, b, galime sudaryti iš $a \cdot b$ vienetinių kvadratų, taigi jo plotas $S = a \cdot b$.



Stačiakampio su kraštinėmis a, b ploto formulė $S = a \cdot b$ teisinga ir tuomet, kai a, b nėra sveikieji skaičiai.

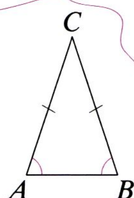
24. Trikampiai ir tiesės

24.1. Lygiašonis trikampis

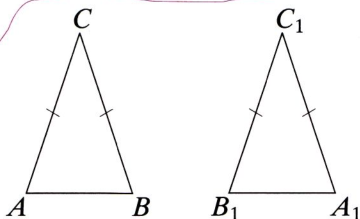
Kiekvienas trikampis turi tris kraštines ir tris kampus. Jei trikampis turi dvi lygias kraštines, jį vadiname *lygiašoniu*, o trečiąją lygiašonio trikampio kraštinę tada vadiname pagrindu. Įsitikinkime, kad lygiašonis trikampis turi du lygius kampus.

TEOREMA
Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs.

Duota: $AC = BC$.
Įrodyti: $\angle A = \angle B$.



Įrodymas. „Apvertę“ trikampį, t. y. atvaizdavę jį simetriškai kokios nors tiesės atžvilgiu, gauname trikampį, lygų pirmajam.



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Apvertę lygiašonį trikampį ABC ($AC = BC$) gausime trikampį $A_1B_1C_1$, taigi
$AC = BC = A_1C_1 = B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Pastūmę (jei reikia, ir pasukę) trikampį $A_1B_1C_1$ galime viršūnę C_1 sutapdinti su C, kraštinę A_1C_1 su BC, B_1C_1 su AC. Kadangi viršūnės A ir B_1 bei B ir A_1 sutampa, tai sutaps ir kraštinės AB ir B_1A_1. Taigi sutaps kampai $\angle CAB$ ir $\angle C_1B_1A_1$, t. y.

$$\angle A = \angle B_1 \quad \text{ir} \quad \angle A = \angle B.$$

Teisinga ir atvirkštinė šiai teoremai teorema: jeigu du trikampio kampai yra lygūs, tai tas trikampis yra lygiašonis.
Jeigu visos trys trikampio kraštinės yra lygios, tai trikampį vadiname *lygiakraščiu*. Pasinaudoję lygiašonio trikampio savybe gauname, kad visi lygiakraščio trikampio kampai yra lygūs.

24.2. Trikampių lygumo požymiai

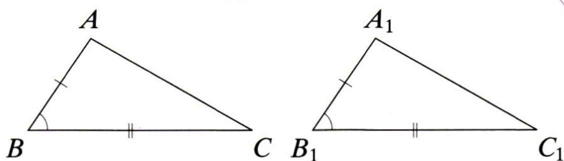
Kad du trikampiai būtų lygūs, vieno trikampio kraštinės turi būti lygios kito trikampio kraštinėms, o kampai — lygūs atitinkamiems kito trikampio kampams, t. y. turi būti teisingos šešios lygybės. Tačiau trikampių lygumo požymiai teigia, kad išvadą apie trikampių lygumą galime padaryti, įrodę, kad atitinkamos trys iš šešių lygybės yra teisingos!

Trikampių lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų

TEOREMA

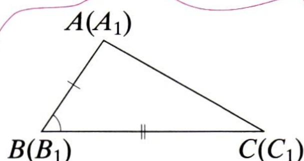
Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų yra atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai yra lygūs.

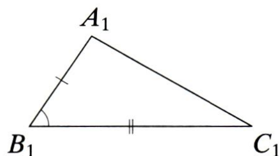
Duota: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$;
$BA = B_1A_1$;
$BC = B_1C_1$;
$\angle B = \angle B_1$.
Įrodyti: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



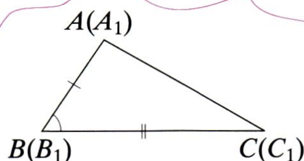
Įrodymas. Trikampį $A_1B_1C_1$ galima taip uždėti ant trikampio ABC, kad viršūnė B sutaptų su B_1, kraštinė A_1B_1 su AB, o B_1C_1 su BC. Kartais pakanka $\triangle A_1B_1C_1$ tik pastumti ir pasukti, o kartais tenka ir apversti.

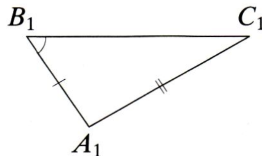
Šitaip uždėjus $\triangle A_1B_1C_1$ ant $\triangle ABC$, viršūnė A_1 sutaps su A, o C_1 su C. Tada ir kraštinės A_1C_1 ir AC sutaps, nes yra tik viena atkarpa, jungianti du duotus plokštumos taškus.





Kad A sutaptų su A_1, B su B_1, C su C_1, $\triangle A_1B_1C_1$ pakanka pastumti.





Kad A sutaptų su A_1, B su B_1, C su C_1, $\triangle A_1B_1C_1$ reikia apversti ir pastumti.

Taigi visos trys $\triangle A_1B_1C_1$ kraštinės sutaps su $\triangle ABC$ kraštinėmis, o kampai — atitinkamai su $\triangle ABC$ kampais, todėl $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Trikampių lygumo požymis pagal kraštinę ir du kampus prie jos

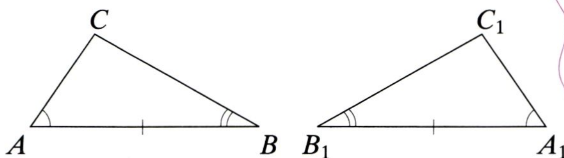
TEOREMA

Jei vieno trikampio kraštinė ir du kampai prie jos yra atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir dviem kampams prie jos, tai tie trikampiai yra lygūs.

Duota: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$;

$AB = A_1B_1$;
$\angle A = \angle A_1$;
$\angle B = \angle B_1$.

Įrodyti: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Įrodymas. Uždėkime $\triangle A_1B_1C_1$ ant $\triangle ABC$ taip, kad kraštinė A_1B_1 sutaptų su kraštine AB (šiame brėžinyje trikampį $A_1B_1C_1$ teks apversti). Viršūnė A_1 sutaps su viršūne A, o B_1 — su B.

Kadangi $\angle A_1 = \angle A$ ir $\angle B_1 = \angle B$, tai kraštinė A_1C_1 ir kraštinė AC bus vienoje tiesėje, o kraštinės B_1C_1 ir BC — kitoje tiesėje.
Taškas C yra šių tiesių susikirtimo taškas, taškas C_1 irgi priklauso abiems tiesėms. Tada C turi sutapti su C_1, nes dvi tiesės gali kirstis tik viename taške. Kadangi C ir C_1 sutampa, tai $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, taigi $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

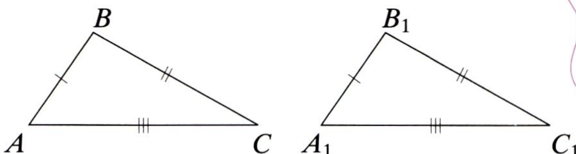
Trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines

TEOREMA

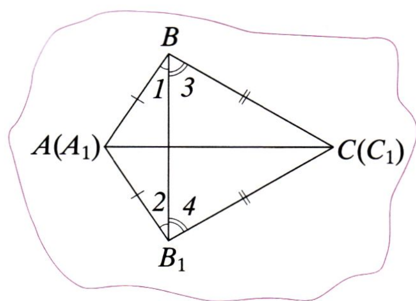
Jei vieno trikampio trys kraštinės yra atitinkamai lygios kito trikampio trims kraštinėms, tai tie trikampiai yra lygūs.

Duota: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$;
$AB = A_1B_1$;
$BC = B_1C_1$;
$AC = A_1C_1$.

Įrodyti: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



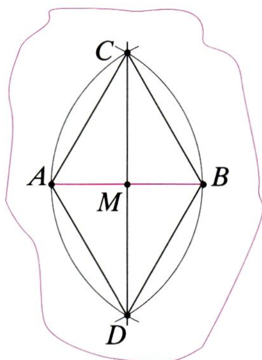
Įrodymas. Tegu AC ir A_1C_1 yra ilgiausios $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ kraštinės. Pridėkime $\triangle A_1B_1C_1$ prie $\triangle ABC$, kad AC sutaptų su A_1C_1, o viršūnės B ir B_1 būtų skirtingose pusėse nuo AC (A_1C_1).



Sujunkime taškus B ir B_1 atkarpa ir nagrinėkime trikampius ABB_1 ir BCB_1.
Kadangi $AB = A_1B_1$, tai $\triangle ABB_1$ lygiašonis ir $\angle 1 = \angle 2$. Iš $\triangle BCB_1$ panašiai gauname $\angle 3 = \angle 4$. Sudėję lygybių $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 3 = \angle 4$ kairiąsias ir dešiniąsias puses gausime $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ arba $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.
Nustatėme, kad $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ tenkina trikampių lygumo pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų požymio sąlygas ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$), taigi $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Teorema įrodyta.

24.3. Trikampių lygumo požymių taikymas

Trikampių lygumo požymius taikome spręsdami brėžimo uždavinius, kai galima naudotis tik skriestuvu ir liniuote.
Išspręskime tokį uždavinį: naudodamiesi tik skriestuvu ir liniuote raskime duotosios atkarpos AB vidurio tašką.
Iš taškų A ir B nubrėžkime apskritimus tuo pačiu spinduliu AB, pažymėkime jų susikirtimo taškus C ir D, nubrėžkime per juos tiesę ir pažymėkime šios tiesės susikirtimo su atkarpa AB tašką M.

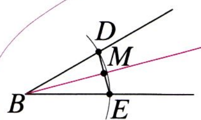


Trikampiai ACD ir BCD lygūs ir lygiašoniai, taigi $\angle ACD = \angle BCD$.
Nagrinėkime $\triangle ACM$ ir $\triangle BCM$. Kadangi $AC = BC$, $\angle ACM = \angle BCM$, o kraštinė MC bendra, tai pasirėmę trikampių lygumo požymiu pagal dvi kraštines ir kampą tarp

jų, gauname $\triangle ACM = \triangle BCM$. Taigi $AM = MB$, t. y. M yra atkarpos AB vidurio taškas.

Be to, gauname, kad $\angle AMC = \angle BMC$. Kadangi $\angle AMC + \angle BMC = 180°$, tai $\angle AMC = 90°$.

Naudodamiesi skriestuvu ir liniuote ne tik radome duotosios atkarpos vidurio tašką, bet ir per jį nubrėžėme tiesę, kertančią atkarpą stačiu kampu.



Kampą padalyti pusiau, t. y. nubrėžti jo pusiaukampinę galima taip. Iš kampo viršūnės B brėžiame apskritimo lanką, pažymime jo susikirtimo su kampo kraštinėmis taškus E, D, sujungiame juos atkarpa ir randame šios atkarpos vidurio tašką M. Įrodę, kad $\triangle BME = \triangle BMD$, gauname, kad $\angle MBE = \angle DBM$.

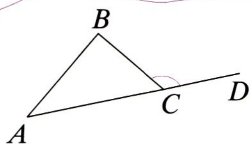
Trikampio kampo pusiaukampinės dalį iki susikirtimo su trikampio kraštine, vadiname trikampio pusiaukampine. Taigi trikampio pusiaukampines galime nubrėžti naudodamiesi vien skriestuvu ir liniuote.

Atkarpą, jungiančią trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės vidurio tašku, vadiname trikampio pusiaukraštine.

Trikampio pusiaukraštines taip pat galime nubrėžti naudodamiesi tik skriestuvu ir liniuote.

APIBRĖŽIMAS

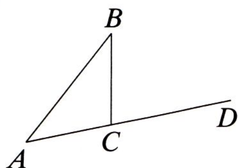
Kampas, gretutinis trikampio vidaus kampui, vadinamas trikampio priekampiu.



$\angle BCD$ — trikampio ABC priekampis.
Be jo, yra dar penki kiti $\triangle ABC$ priekampiai.

TEOREMA (TRIKAMPIO PRIEKAMPIO SAVYBĖ)

Trikampio priekampis yra didesnis už kiekvieną jam negretutinį vidaus kampą.

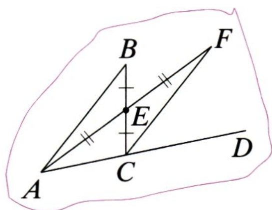


Duota: $\triangle ABC$,

$\angle BCD$ — trikampio priekampis.
Įrodyti: $\angle BCD > \angle B$, $\angle BCD > \angle A$.

Įrodymas. Tegu $\angle B \geqslant \angle A$. Pakanka įrodyti, kad $\angle BCD > \angle B$, nes tada bus teisinga ir nelygybė $\angle BCD > \angle A$.

Papildykime brėžinį: iš viršūnės A nubrėžkime pusiaukraštinę AE ir pratęsę ją atidėkime $EF = AE$; taškus C ir F sujunkime.



Kadangi $BE = CE$, $AE = EF$, $\angle AEB = \angle CEF$ (kryžminiai), tai $\triangle AEB = \triangle CEF$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).

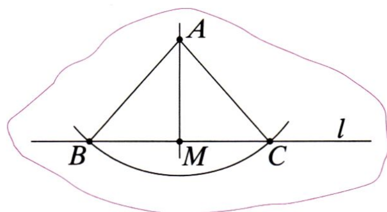
Iš šių trikampių lygumo gauname, kad $\angle B = \angle ECF$. Bet $\angle ECF$ sudaro tik dalį priekampio BCD. Vadinasi, $\angle BCD > \angle B$.

APIBRĖŽIMAS

Dvi tieses vadiname statmenomis, jei jos susikerta stačiu kampu.

Statmeniu, nuleistu iš duotojo taško A į tiesę l, vadiname jai statmenos tiesės atkarpą, kurios vienas galas sutampa su tašku A, o kitas yra tiesėje l. Šį tašką vadiname statmens pagrindu.

Įsitikinkime, kad iš bet kurio taško A, esančio šalia tiesės l, į ją galime nuleisti statmenį. Pasirinkime tiesėje tašką B, nubrėžkime apskritimo su centru A ir spinduliu AB lanką, pažymėkime C kitą šio lanko susikirtimo su tiese l tašką, o M — atkarpos BC vidurio tašką. Įrodę, kad $\triangle ABM = \triangle ACM$, gauname $\angle AMC = \angle AMB$; kadangi šių kampų suma lygi 180°, tai $\angle AMC = 90°$.

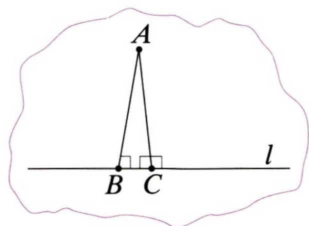


Pasirėmę trikampio priekampio savybe įrodysime, kad iš taško į tiesę galime nuleisti tik vieną statmenį.

TEOREMA

Iš taško, esančio šalia tiesės, į ją galima nuleisti tik vieną statmenį.

Įrodymas. Įrodysime prieštaros būdu. Tarkime, kad iš taško A, esančio šalia tiesės l, į ją galima nuleisti du statmenis. Tegu B ir C yra jų pagrindai.



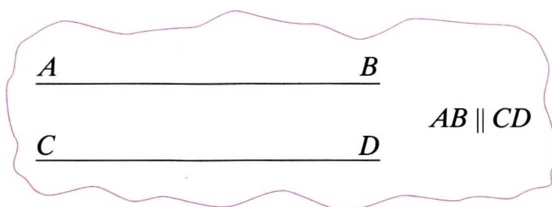
Tada gautume, kad $\triangle ABC$ priekampis (prie viršūnės C) yra lygus jam negretutiniam trikampio vidaus kampui $\angle ABC$. Tai prieštarauja įrodytai trikampio priekampio savybei. Taigi iš taško į tiesę dviejų statmenų nuleisti negalima.

Statmenį, nuleistą iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra prieš viršūnę esanti trikampio kraštinė, vadiname trikampio aukštine.

Užduotis. Naudodamiesi trikampių lygumo požymiais įrodykite, kad lygiašonio trikampio aukštinė, nuleista į pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, ir pusiaukampinė.

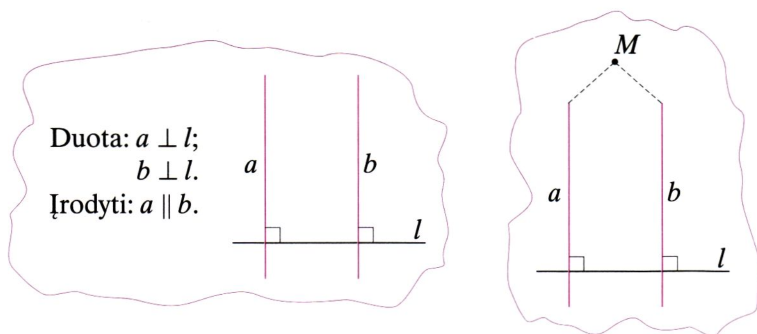
24.4. Lygiagrečios tiesės

APIBRĖŽIMAS
Dvi plokštumos tiesės vadinamos lygiagrečiomis, jeigu jos nesikerta.



Dviejų tiesių, statmenų trečiajai tiesei, lygiagretumas

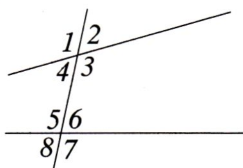
TEOREMA
Dvi tiesės, statmenos tai pačiai tiesei, yra lygiagrečios.



Įrodymas. Įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, kad tiesės a ir b nėra lygiagrečios. Tada jos turi bendrą tašką M, t. y. susikerta. Tačiau tada iš taško M į tiesę l bus nuleisti du statmenys, esantys tiesėse a ir b. Kadangi taip būti negali, tai tiesės a ir b negali kirstis, t. y. jos lygiagrečios.

Dviejų tiesių, perkirstų trečiąja tiese, lygiagretumo požymiai

Jei dvi tieses perkirsime trečiąja, tai gausime 8 kampus. Juos grupuosime į tokias poras:



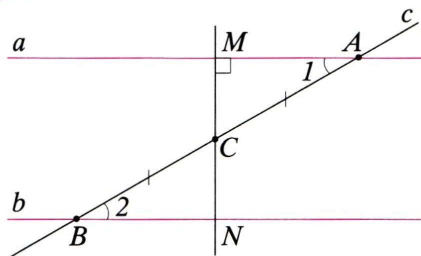
Atitinkamųjų kampų poros: $\angle 1$ ir $\angle 5$; $\angle 2$ ir $\angle 6$; $\angle 3$ ir $\angle 7$; $\angle 4$ ir $\angle 8$.
Vidaus priešinių kampų poros: $\angle 4$ ir $\angle 6$; $\angle 3$ ir $\angle 5$.
Išorės priešinių kampų poros: $\angle 1$ ir $\angle 7$; $\angle 2$ ir $\angle 8$.
Vidaus vienašalių kampų poros: $\angle 3$ ir $\angle 6$; $\angle 4$ ir $\angle 5$.
Išorės vienašalių kampų poros: $\angle 1$ ir $\angle 8$; $\angle 2$ ir $\angle 7$.

TEOREMA

Jeigu kampai, gauti dvi plokštumos tieses perkirtus trečiąja, pasižymi bent viena iš šių savybių:
1) bent vieną vidaus (išorės) priešinių kampų porą sudaro lygūs kampai;
2) bent vieną atitinkamųjų kampų porą sudaro lygūs kampai;
3) bent vienos vidaus (išorės) vienašalių kampų poros kampų suma lygi 180°;
tai tos dvi tiesės yra lygiagrečios.

Įrodymas. Šioje teoremoje suformuluoti net trys tiesių lygiagretumo požymiai. Įrodysime dviejų tiesių lygiagretumo požymį pagal vidaus priešinius kampus.

Duota: $\angle 1 = \angle 2$.
Įrodyti: $a \parallel b$.



Atkarpos AB vidurį pažymėkime raide C ir per jį nubrėžkime tiesei a statmeną tiesę MN.

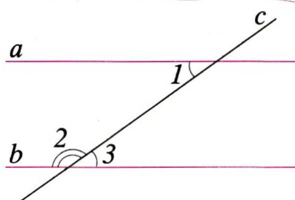
Kadangi $AC = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle ACM = \angle BCN$, tai $\triangle ACM = \triangle BCN$. Todėl $\angle CMA = \angle CNB = 90^\circ$, taigi $MN \perp b$.

Gavome, kad tiesės a ir b yra statmenos tai pačiai tiesei MN, taigi jos yra lygiagrečios.

1 užduotis. Remdamiesi kryžminių kampų savybe ir dviejų tiesių lygiagretumo požymiu pagal vidaus priešinius kampus įrodykite:
a) dviejų tiesių lygiagretumo požymį pagal išorės priešinius kampus;
b) dviejų tiesių lygiagretumo požymį pagal atitinkamuosius kampus.

Įrodysime dviejų tiesių lygiagretumo požymį pagal vidaus vienašalius kampus.

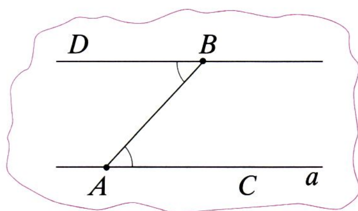
Duota: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.
Įrodyti: $a \parallel b$.



Įrodymas. Kadangi $\angle 2$ ir $\angle 3$ yra gretutiniai kampai, tai iš lygybių $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ir $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ gauname, kad $\angle 1 = \angle 3$. Bet $\angle 1$ ir $\angle 3$ yra vidaus priešiniai, vadinasi, $a \parallel b$ pagal jau įrodytą požymį.

2 užduotis. Įrodykite dviejų tiesių lygiagretumo požymį pagal išorės vienašalius kampus.

Dviejų tiesių lygiagretumo požymis pagal vidaus priešinius kampus nurodo, kaip per duotąjį tašką nubrėžti tiesę, lygiagrečią duotajai tiesei. Iš tikrųjų, pakanka sujungti duotąjį tašką B su bet kuriuo duotosios tiesės a tašku A, nubrėžti kampą DBA, lygų BAC ir pratęsti spindulį DB iki tiesės. Pagal minėtą požymį ši tiesė yra lygiagreti tiesei a.



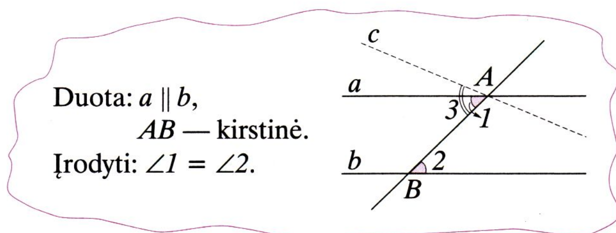
Ar ši tiesė yra vienintelė, t. y. ar negalima per tašką nubrėžti dar vienos tiesės, lygiagrečios duotajai?
Teiginys, kad tokia tiesė yra vienintelė, nėra toks akivaizdus, kaip, pavyzdžiui, teiginys apie vienintelę tiesę, jungiančią du duotus taškus. Jau minėjome, kad Euklidas savo „Pradmenyse" pateikė jį be įrodymo ir laikė aksioma.

LYGIAGREČIŲ TIESIŲ AKSIOMA
Per tašką, esantį šalia duotosios tiesės, galima nubrėžti tik vieną tiesę, lygiagrečią duotajai.

Teoremos, atvirkštinės dviejų tiesių lygiagretumo požymiams
Suformuluosime teiginius, kurie yra atvirkštiniai dviejų tiesių lygiagretumo požymiams.

TEOREMA
Dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja gaunami kampai, turintys šias savybes:
1) kiekvieną vidaus (išorės) priešinių kampų porą sudaro lygūs kampai;
2) kiekvieną atitinkamųjų kampų porą sudaro lygūs kampai;
3) kiekvienos vidaus (išorės) vienašalių kampų poros kampų suma lygi 180°.

Įrodymas. Įrodysime teoremos teiginį apie vidaus priešinius kampus.



Įrodinėsime prieštaros būdu. Tarkime, kad vidaus priešiniai kampai nelygūs: $\angle 1 \neq \angle 2$. Tada per tašką A galima nubrėžti tiesę c taip, kad $\angle 3$ būtų lygus $\angle 2$. Bet $\angle 3$ ir $\angle 2$ yra vidaus priešiniai kampai prie tiesių c ir b bei jų kirstinės AB. Vadinasi, pagal vieną iš tiesių lygiagretumo požymių $c \parallel b$. Gavome, kad per tašką A eina dvi tiesės a ir c, lygiagrečios tiesei b. Tai prieštarauja lygiagrečių tiesių aksiomai. Vadinasi, prielaida, kad $\angle 1 \neq \angle 2$, neteisinga, todėl $\angle 1 = \angle 2$.

3 užduotis. Įrodykite, kad išorės priešiniai kampai prie dviejų lygiagrečių tiesių ir kirstinės yra lygūs.

4 užduotis. Įrodykite, kad atitinkamieji kampai prie dviejų lygiagrečių tiesių ir kirstinės yra lygūs.

Iš šios teoremos gauname, kad tiesė, statmena vienai iš lygiagrečių tiesių, statmena ir kitai. Taip pat nesunku įrodyti, kad statmenys, nuleisti iš dviejų tiesės taškų į kitą, lygiagrečią pirmajai tiesę, yra lygūs. Kitaip tariant, atstumas tarp lygiagrečių tiesių nepriklauso nuo to, kur tą atstumą matuojame.

24.5. Lygiagrečių tiesių savybių taikymas

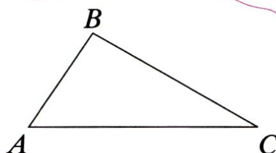
Lygiagrečių tiesių savybės taikomos labai dažnai. Šiame skyrelyje pasinaudoję jomis įrodysime kelias svarbias teoremas apie trikampį.

Trikampio kampų suma

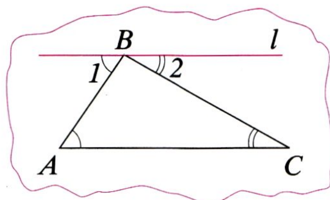
TEOREMA
Trikampio kampų suma lygi 180°.

Duota: $\triangle ABC$.

Įrodyti: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



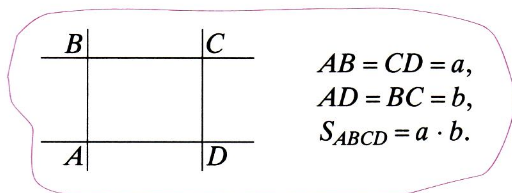
Įrodymas. Per trikampio viršūnę B nubrėžkime tiesę l, lygiagrečią pagrindui AC, ir pažymėkime kampus, kuriuos ši tiesė sudaro su trikampio kraštinėmis.



Kadangi $\angle 1$ ir $\angle A$ yra vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių l ir AC bei kirstinės AB, tai $\angle 1 = \angle A$. Analogiškai gauname $\angle 2 = \angle C$. Tada $\angle A + \angle B + \angle C =$ $= \angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180°$, nes $\angle 1$, $\angle B$ ir $\angle 2$ kartu sudaro ištiestinį kampą.
Teorema įrodyta.

1 užduotis. Pasiremkite šia teorema ir įrodykite, kad trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio vidaus kampų sumai.

Jei dvi lygiagrečias tieses kirsime trečiąja, kuri yra statmena vienai iš jų, tai ji bus statmena ir kitai. Kirsdami dvi lygiagrečias tieses joms statmenų tiesių pora gauname keturkampį, kurio visi kampai statūs, o kraštinės poromis lygios. Jį vadiname stačiakampiu.

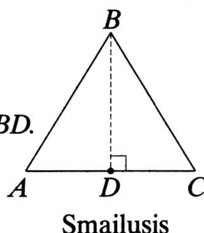


Stačiakampio plotas lygus dviejų jo kraštinių ilgių sandaugai. Įrodysime teoremą apie trikampio plotą.

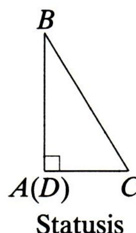
TEOREMA
Trikampio plotas lygus jo kraštinės ir aukštinės, nuleistos į tą kraštinę, ilgių sandaugos pusei.

Duota: $BD \perp AC.$

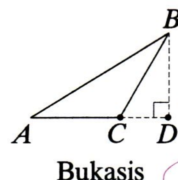
Įrodyti: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD.$



Smailusis

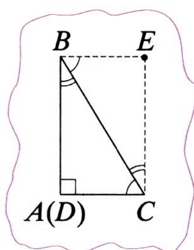


Statusis



Bukasis

Įrodymas. Pradėkime nuo stačiojo trikampio, $\angle A = 90°$. Per taškus B ir C nubrėžkime tieses, statmenas AC ir AB. Tegu E yra šių tiesių susikirtimo taškas.



Kadangi $BE \parallel AC$, tai $\angle EBC = \angle ACB$. Analogiškai gauname, kad $\angle ABC = \angle BCE$. Pritaikę trikampių lygumo pagal kraštinę ir du kampus prie jos požymį gauname: $\triangle ABC = \triangle BCE$, taigi $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCE}$. Kadangi

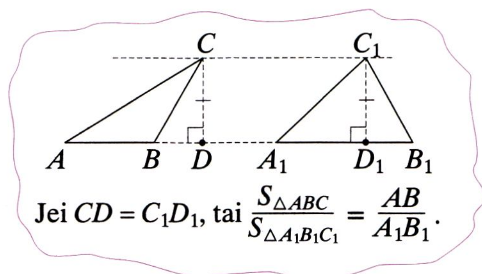
$$S_{ABEC} = AC \cdot BD = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCE} = 2 \cdot S_{\triangle ABC},$$

tai $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

2 užduotis. Įrodykite trikampio ploto formulę kitais dviem atvejais. Pasinaudokite lygybėmis

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}, \qquad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD}.$$

Išvada. Jeigu dviejų trikampių aukštinės, nuleistos į pagrindus, yra lygios, tai tų trikampių plotų santykis lygus pagrindų ilgių santykiui.

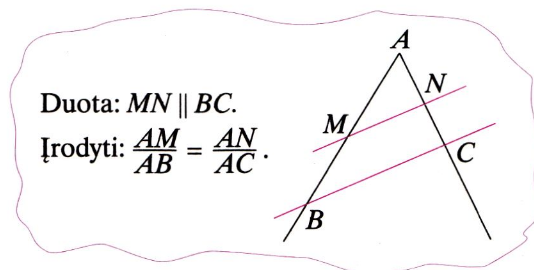


Įrodysime teoremą apie atkarpų, kurias lygiagrečios tiesės atkerta kampo kraštinėse, proporcingumą.

Sakome, kad atkarpos, kurių ilgiai yra a, b, yra proporcingos atkarpoms, kurių ilgiai c, d, jei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

TALIO TEOREMA

Jeigu dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai vienoje kampo kraštinėje atkirstos atkarpos yra proporcingos kitoje kampo kraštinėje atkirstoms atkarpoms.



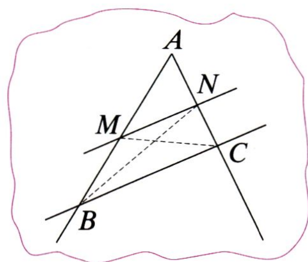
Įrodymas. Trikampių AMN ir AMC aukštinės, nubrėžtos į kraštines AN ir AC, sutampa, todėl

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{AN}{AC}. \tag{1}$$

Analogiškai įsitikiname, kad

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ANB}} = \frac{AM}{AB}. \tag{2}$$

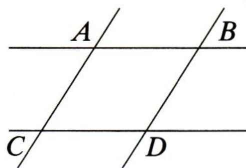
Jeigu įrodytume, kad $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ANB}$, tai iš karto gautume, kad $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$.



Panagrinėję brėžinį matome, kad $S_{\triangle ANB} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle MNB}$, $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle MNC}$. Trikampiai MNC ir MNB turi bendrą kraštinę MN, o aukštinės, nuleistos į šią kraštinę, taip pat yra lygios (jos lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių MN ir BC). Taigi $S_{\triangle MNC} = S_{\triangle MNB}$, todėl ir $S_{\triangle ANB} = S_{\triangle AMC}$. Iš (1) ir (2) gauname $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

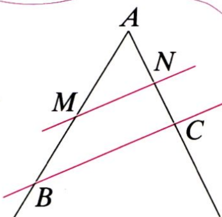
3 užduotis. Įrodykite, kad dvi lygiagrečios tiesės, kertančios kitas dvi lygiagrečias tieses, kiekvienoje iš jų iškerta lygias atkarpas.

Duota: $AC \parallel BD$, $AB \parallel CD$.
Įrodyti: $AB = CD$, $AC = BD$.



TEOREMA (ATVIRKŠTINĖ TALIO TEOREMAI)

Jeigu dvi tiesės kerta kampo kraštines ir vienoje kampo kraštinėje atkirstos atkarpos yra proporcingos kitoje kampo kraštinėje atkirstoms atkarpoms, tai tos tiesės yra lygiagrečios.

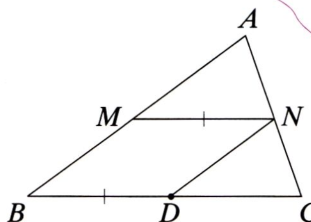


Duota: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Įrodyti: $MN \parallel BC$.

Įrodymas. Įsivaizduokime, kad per tašką B nubrėžėme tiesę l, lygiagrečią MN. Tegu ši tiesė kerta kitą kraštinę taške D. Iš Talio teoremos gauname: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$. Tačiau $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, taigi $\frac{AN}{AC} = \frac{AN}{AD}$. Iš šios lygybės gauname, kad $AC = AD$, t. y. taškai C ir D sutampa. Tada tiesė l sutampa su BC, t. y. $BC \parallel MN$.
Teorema įrodyta.

Jeigu trikampį kirsime tiese, lygiagrečia pagrindui, tai atkirsime jame mažesnį trikampį. Nesunku pastebėti, kad mažesniojo trikampio kampai lygūs atitinkamiems didesniojo trikampio kampams. Įrodysime teoremą apie šių trikampių kraštines.

TEOREMA
Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta nuo jo trikampį, kurio kraštinės yra proporcingos duotojo trikampio kraštinėms.



Duota: $MN \parallel BC$.
Įrodyti: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Įrodymas. Remdamiesi Talio teorema gauname $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Lieka įrodyti, kad $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$. Per tašką N nubrėžkime tiesę, lygiagrečią AB. Tegu ši tiesė kerta kraštinę BC taške D. Pagal Talio teoremą, pritaikytą kampui ACB ir tiesėms AB ir ND, gauname: $\frac{CN}{AC} = \frac{CD}{BC}$. Pasinaudoję tuo, kad $CN = AC - AN$, $CD = BC - BD$, gauname:

$$\frac{AC - AN}{AC} = \frac{BC - BD}{BC}, \qquad 1 - \frac{AN}{AC} = 1 - \frac{BD}{BC}, \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{BD}{BC}.$$

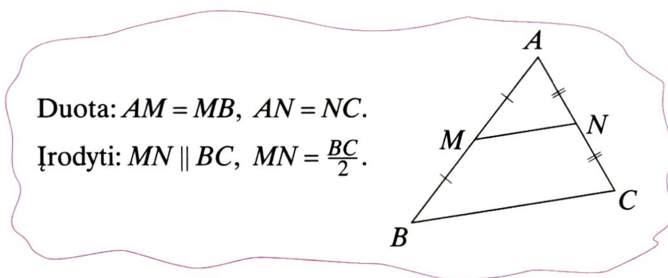
Tačiau $BD = MN$, taigi $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Trikampio vidurinė linija

APIBRĖŽIMAS
Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama trikampio vidurine linija.

Įrodysime trikampio vidurinės linijos savybę.

TEOREMA
Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trečiajai trikampio kraštinei ir lygi jos pusei.



Įrodymas. Kadangi

$$AM = \frac{1}{2}AB \text{ ir } AN = \frac{1}{2}AC, \quad \text{tai} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \text{ ir } \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi,

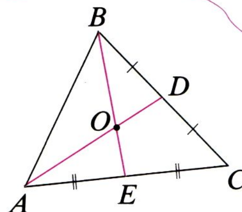
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

ir pagal atvirkštinę Talio teoremą $MN \parallel BC$.
Kadangi $MN \parallel BC$, tai trikampių AMN ir ABC kraštinės yra proporcingos:

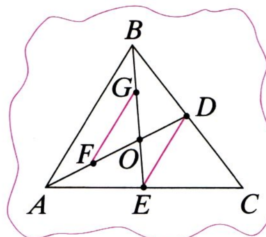
$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}, \qquad MN = \frac{BC}{2}.$$

Pasinaudosime trikampio vidurinės linijos savybe ir įrodysime teoremą apie trikampio pusiaukraštines.

TEOREMA
Bet kurios dvi trikampio pusiaukraštinės kertasi taške, kuris dalija kiekvieną iš jų santykiu 2 : 1 *einant nuo viršūnės.*



Įrodymas. Sujungę taškus E ir D gausime trikampio ABC vidurinę liniją, todėl $ED \parallel AB$, $ED = \frac{1}{2}AB$. Padalykime atkarpas AO ir BO taškais F ir G pusiau; sujungę juos gausime trikampio AOB vidurinę liniją, taigi $FG \parallel AB$, $FG = \frac{1}{2}AB$. Kadangi FG ir ED lygios pusei AB, tai $FG = ED$. Be to FG ir ED lygiagrečios AB, todėl $FG \parallel ED$. Vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių ir kirstinės yra lygūs, todėl $\angle FDE = \angle GFD$, $\angle FGE = \angle GED$. Taigi $\triangle GOF = \triangle DOE$. Vadinasi, $OE = OG = \frac{1}{2}BO$, $OD = OF = \frac{1}{2}AO$, todėl $\frac{BO}{OE} = 2$, $\frac{AO}{OD} = 2$. Teorema įrodyta.



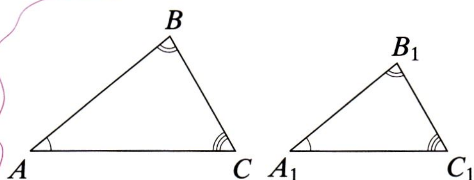
Teoremą įrodėme trikampio ABC pusiaukraštinėms AD ir BE, išvestoms iš viršūnių A ir B. Pusiaukraštinių susikirtimo tašką pažymėjome O. Teorema teisinga ir pusiaukraštinėms, išvestoms iš viršūnių A ir C. Šių pusiaukraštinių susikirtimo taškas taip pat dalija pusiaukraštinę AD santykiu 2 : 1, taigi sutampa su tašku O. Vadinasi, pusiaukraštinė, išvesta iš viršūnės C, eina per kitų dviejų pusiaukraštinių susikirtimo tašką. Taigi trikampio pusiaukraštinių savybę galime suformuluoti taip:

TEOREMA
Visos trys trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris dalija jas santykiu 2 : 1 *einant nuo viršūnės.*

24.6. Trikampių panašumas

APIBRĖŽIMAS
Jei vieno trikampio kampai yra lygūs atitinkamiems kito trikampio kampams, o jo kraštinės yra proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms, tai sakome, kad pirmasis trikampis panašus į antrąjį.

Jei $\triangle ABC$ panašus į $\triangle A_1B_1C_1$, tai rašome $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



Jei $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ ir $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, tai $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Skaičius k vadinamas trikampių panašumo koeficientu.

Iš trikampių panašumo apibrėžimo išplaukia tokie teiginiai:

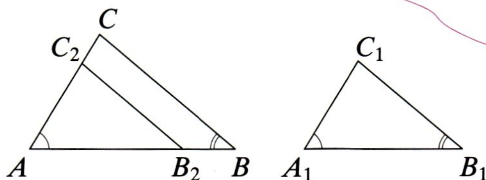
- trikampis panašus į kiekvieną jam lygų trikampį;
- jei pirmasis trikampis panašus į antrąjį, tai antrasis trikampis panašus į pirmąjį;
- jei pirmasis trikampis panašus į antrąjį trikampį, o šis trikampis — į trečiąjį, tai pirmasis trikampis taip pat panašus į trečiąjį.

Kai yra nesvarbu, kurį iš dviejų panašių vienas į kitą trikampių laikyti pirmuoju, kurį antruoju — tiesiog sakome, kad turime du panašius trikampius.
Trikampių lygumo apibrėžime reikalaujama, kad būtų teisingos šešios lygybės (atitinkami kampai ir atitinkamos kraštinės turi būti lygios). Tačiau trikampių lygumo požymiai teigia, kad pakanka patikrinti tik tris lygybes iš šešių.
Trikampių panašumo apibrėžime taip pat reikalaujama, kad būtų patenkintos šešios lygybės. Įrodysime, kad išvadą apie trikampių panašumą galima padaryti patikrinus vos dvi lygybes.

Trikampių panašumo požymis pagal du kampus

TEOREMA
Jeigu vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai trikampiai yra panašūs.

Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



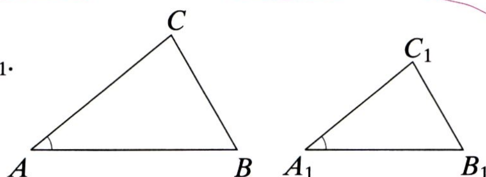
Įrodymas. Akivaizdu, kad $\angle C = \angle C_1$. Reikia įrodyti, kad trikampių kraštinės yra proporcingos. Tarkime, kad kraštinė A_1B_1 trumpesnė už AB. Iš taško A spindulyje AB atidėkime atkarpą $AB_2 = A_1B_1$, o spindulyje AC — atkarpą $AC_2 = A_1C_1$.

Trikampiai AB_2C_2 ir $A_1B_1C_1$ yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Kadangi $\angle B_2 = \angle B_1 = \angle B$, tai $B_2C_2 \parallel BC$. Pasirėmę teorema apie trikampį, kurį atkerta nuo duotojo trikampio lygiagreti pagrindui tiesė, gauname $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{CB}{C_2B_2}$. Kadangi $AB_2 = A_1B_1$, $AC_2 = A_1C_1$, $C_2B_2 = C_1B_1$, tai $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$.
Taigi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Trikampių panašumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų

TEOREMA
Jeigu vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs, tai trikampiai yra panašūs.

Duota: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

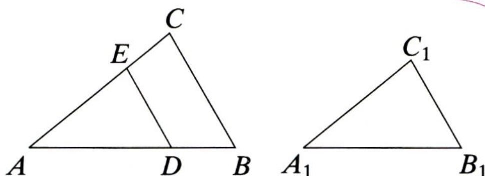


1 užduotis. Įrodykite šią teoremą. Uždėkite $\triangle A_1B_1C_1$ ant $\triangle ABC$ taip, kad taškas A sutaptų su A_1, kraštinė A_1B_1 būtų kraštinėje AB. Pasiremkite atvirkštine Talio teorema.

Trikampių panašumo požymis pagal tris kraštines

TEOREMA
Jeigu vieno trikampio visos trys kraštinės proporcingos kito trikampio kraštinėms, tai trikampiai yra panašūs.

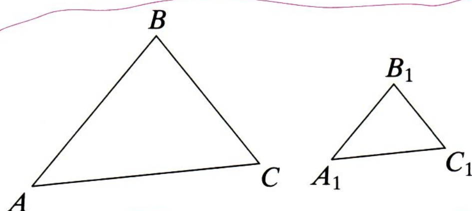
Duota: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.
Įrodyti: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



Įrodymas. Tarkime, kad A_1B_1 yra trumpesnė kraštinė negu AB. Atidėkime kraštinėje AB atkarpą $AD = A_1B_1$ ir per tašką D nubrėžkime tiesę, lygiagrečią BC. Tegu ši tiesė kerta AC taške E. Tada $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$. Taigi $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{ED}$. Tačiau

$AD = A_1B_1$, todėl $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{ED}$. Kadangi $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, tai $ED = B_1C_1$. Panašiai įrodome, kad $AE = A_1C_1$ ir $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$. Tada $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

TEOREMA
Panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.
Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.



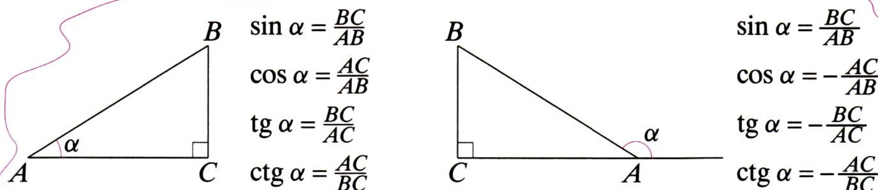
Jei $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, ir $\frac{AB}{A_1B_1} = k$,

tai $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

2 užduotis. Įrodykite teoremą apie panašiųjų trikampių perimetrų ir plotų santykius.

24.7. Kampų ir kraštinių sąryšiai trikampyje

Trikampio kraštinių ir kampų sąryšius dažnai užrašome naudodamiesi kampų trigonometrinėmis funkcijomis. Prisiminkime, kaip smailiųjų ir bukųjų kampų trigonometrinės funkcijos reiškiamos atitinkamų stačiųjų trikampių kraštinėmis.



Kampų 0°, 90°, 180° trigonometrinių funkcijų reikšmės yra tokios:

$$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1,$$
$$\cos 0^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1,$$
$$\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} 180^\circ = 0, \quad \operatorname{ctg} 90^\circ = 0.$$

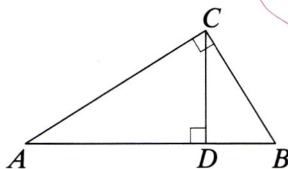
Apskaičiuosime trigonometrinių funkcijų reikšmes, kai $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Tačiau prieš tai įrodysime svarbią teoremą.

PITAGORO TEOREMA

Stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

Duota: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$.

Įrodyti: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



Įrodymas. Iš stačiojo kampo viršūnės C nubrėžiame aukštinę CD.
Iš stačiųjų trikampių ADC ir ABC panašumo gauname:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Iš čia

$$AC^2 = AB \cdot AD. \quad (1)$$

Iš stačiųjų trikampių BDC ir ABC panašumo gauname:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Iš čia

$$BC^2 = AB \cdot DB. \quad (2)$$

Sudėję (1) ir (2) lygybes panariui gauname:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Teorema įrodyta.

Užrašykime Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui ABC ($\angle C = 90°$) dar kartą:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Padaliję abi puses iš AB^2 gauname:

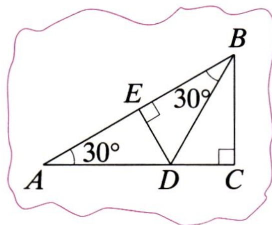
$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1. \quad (3)$$

Pažymėkime smailųjį kampą A raide α. Tada $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, o lygybę (3) galime užrašyti taip:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Ši formulė teisinga visiems, ne tik smailiesiems kampams α.

Apskaičiuosime kampų $\alpha = 30°, 45°, 60°$ trigonometrines funkcijas.



Tegu $\triangle ABC$ yra statusis, $\angle A = 30°$. Tada $\angle B = 60°$. Nubrėžkime kampo B pusiaukampinę BD, $\angle ABD = 30°$. Iš taško D nubrėžkime į AB statmenį DE. Nesunku įsitikinti, kad $\triangle AED = \triangle BED$. Taigi $AE = EB = \frac{1}{2}AB$. Taip pat lengva įrodyti, kad $\triangle BCD = \triangle BED$, todėl $BC = EB = = \frac{1}{2}AB$.

Dabar gauname

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

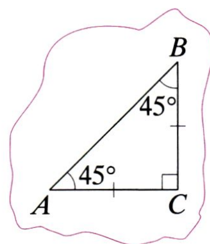
Pritaikę formulę $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kai $\alpha = 30°$, ir prisiminę, kad smailiojo kampo kosinusas yra teigiamas, gausime

$$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jeigu stačiojo trikampio ABC vienas kampas lygus $45°$, tai kitas kampas irgi lygus $45°$, o trikampis lygiašonis.

Taigi

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \cos 45°.$$



Tada iš formulės

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

gausime $2\sin^2 45° = 1$. Taigi

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kampo $\alpha = 60°$ sinuso ir kosinuso reikšmes gausime pasinaudoję formulėmis $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Kampų tangentus ir kotangentus galima suskaičiuoti naudojantis sąryšiais

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Pagrindinių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0

Pitagoro teorema teigia, kad stačiojo trikampio kraštinių ilgiai susiję paprasta lygybe. Įrodysime, kad panaši lygybė teisinga bet kokiam trikampiui.

KOSINUSŲ TEOREMA

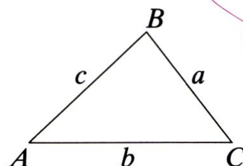
Trikampio kraštinės ilgio kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai minus dviguba tų kraštinių ilgių ir tarp jų esančio kampo kosinuso sandauga.

Duota: $BC = a, AC = b, AB = c$.

Įrodyti: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.



Įrodysime tik vieną formulę, pavyzdžiui, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Įrodymas. Trikampyje ABC kampas C gali būti: 1) statusis; 2) smailusis; 3) bukasis.

1) Kai $\angle C = 90°$, tai trikampis yra statusis, todėl jam teisinga Pitagoro teorema:

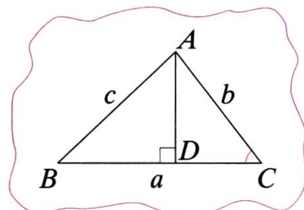
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kadangi $\cos C = 0$, tai šią lygybę galime užrašyti taip:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Taigi teoremos teiginys yra teisingas, jis tvirtina tą patį, kaip ir Pitagoro teorema.

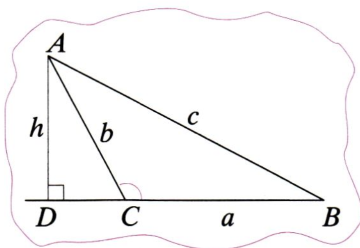
2) Jeigu kampas C — smailusis, tai trikampyje ABC yra dar bent vienas smailusis kampas, pavyzdžiui, $\angle B$. Iš viršūnės A nubrėžę aukštinę AD gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD.



Iš stačiojo trikampio ACD randame $CD = b\cos C$ ir $AD^2 = b^2 - CD^2$, o iš trikampio ABD randame $c^2 = AD^2 + DB^2 = AD^2 + (a - CD)^2 = AD^2 + a^2 - 2aCD + CD^2$. Į šią lygybę įrašę CD ir AD^2 išraiškas gauname:

$$c^2 = b^2 - CD^2 + a^2 - 2ab\cos C + CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

3) Tarkime, kampas C yra bukasis.
Iš viršūnės A nubrėžę aukštinę AD, gauname du stačiuosius trikampius ACD ir ABD. Iš trikampio ACD randame $AD^2 = b^2 - CD^2$ ir $CD = b\cos(180^\circ - C) = -b\cos C$, o iš trikampio ABD randame



$$c^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (a + CD)^2.$$

Į šią lygybę įrašę CD ir AD^2 išraiškas, gauname:

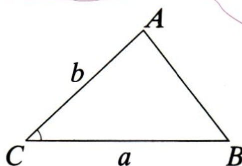
$$c^2 = b^2 - CD^2 + a^2 + 2aCD + CD^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot CD = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

24.8. Trikampio ploto formulės

Trikampio plotą galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, čia a — trikampio kraštinės, h — į ją nuleistos aukštinės ilgis. Tačiau yra ir kitų formulių trikampio plotui reikšti.

TEOREMA
Trikampio plotas lygus dviejų kraštinių ilgių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

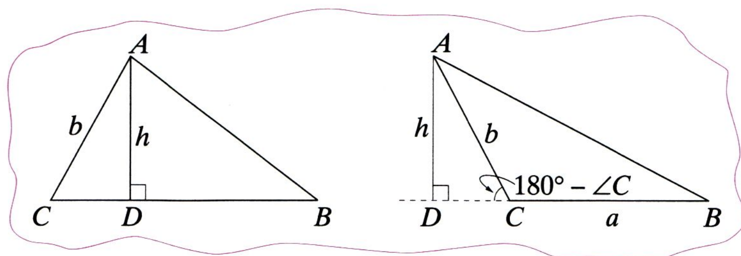
Duota: $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$.
Įrodyti: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$.



Įrodymas. Galimi trys atvejai: 1) $\angle C = 90^\circ$; 2) $\angle C < 90^\circ$; 3) $\angle C > 90^\circ$.
1) Kai $\angle C = 90^\circ$, tai trikampis yra statusis, a, b yra jo statinių ilgiai. Taigi $S_\triangle = \frac{1}{2}ab$; kadangi $\sin C = \sin 90^\circ = 1$, tai $S_\triangle = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin C$. Teoremos formulė yra teisinga.

2) ir 3) atvejus nagrinėsime kartu.

Brėžinyje pavaizduoti du trikampiai ABC, kurių vieno kampas C yra smailus, o kito — bukas.



Iš viršūnės A nubrėžkime aukštinę h į kraštinę BC arba jos tęsinį. Abiem atvejais $S_\triangle = \frac{1}{2}ah$. Smailiojo kampo atveju pagal sinuso apibrėžimą gauname $\sin C = \frac{h}{b}$, $h = b\sin C$. Bukojo kampo atveju $\sin(180° - C) = \frac{h}{b}$, $h = b\sin(180° - C) = b\sin C$. Taigi abiem atvejais

$$h = b\sin C, \qquad S_\triangle = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Trikampio plotą galima suskaičiuoti žinant vien tik trikampio kraštinių ilgius. Tokią galimybę suteikia Herono formulė.

TEOREMA

Trikampio, kurio kraštinių ilgiai yra a, b, c, plotas reiškiamas formule

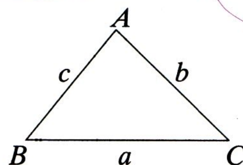
$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Duota: $AB = c, BC = a, AC = b,$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Įrodyti: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ši formulė vadinama Herono formule.



Įrodymas. Pastebėkime, kad dydis p yra lygus pusei trikampio perimetro, taigi p — pusperimetris.

Žinome, kad $S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C$. Išreikšime $\sin C$ trikampio kraštinių ilgiais. Iš pradžių užrašykime kosinusų teoremos lygybę $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ir išreikškime $\cos C$:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Kadangi $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, tai

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = (1 - \cos C)(1 + \cos C).$$

Raskime $1 - \cos C$:

$$1 - \cos C = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \\ = \frac{(b + c - a)(a + c - b)}{2ab}.$$

Tačiau $a + b + c = 2p$, todėl

$$b + c - a = b + c + a - 2a = 2p - 2a,$$

$$a + c - b = 2p - 2b.$$

Taigi

$$1 - \cos C = \frac{2^2(p-a)(p-b)}{2ab} = \frac{2(p-a)(p-b)}{ab}.$$

Panašiai skaičiuodami gauname

$$1 + \cos C = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \frac{2p(p-c)}{ab}.$$

Taigi

$$\sin^2 C = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{(ab)^2}.$$

Vadinasi,

$$S_\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pastaba. Yra ir kitų formulių trikampio plotui apskaičiuoti. Pavyzdžiui:

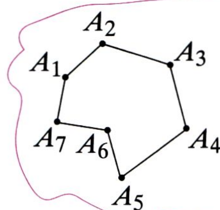
$$S_\triangle = \frac{abc}{4R},$$

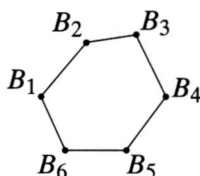
$$S_\triangle = pr,$$

čia a, b, c — trikampio kraštinės, R — apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulys, r — įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys.

25. Daugiakampiai

Sujungę plokštumos taškus A_1, A_2, ..., A_n atkarpomis A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ gauname laužtę. Taškus vadiname jos viršūnėmis, o atkarpas — grandimis. Jei pirmoji viršūnė sutampa su paskutiniąja — laužtę vadiname uždarąja. Nagrinėsime paprastąsias laužtes, t. y. tokias laužtes, kurių gretimos grandys nėra vienoje tiesėje, o negretimos — neturi bendrų taškų. Plokštumos dalį, apribotą paprastąja uždarąja laužte, vadiname daugiakampiu. Laužtės viršūnes, grandis, gretimų grandžių sudaromus kampus vadiname daugiakampio viršūnėmis, kraštinėmis ir kampais. Daugiakampį, turintį 3 viršūnes, vadiname trikampiu, keturias — keturkampiu, n viršūnių — n-kampiu.



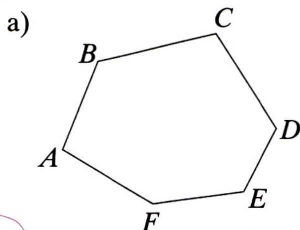


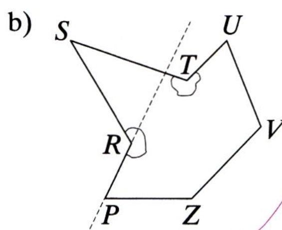
Baigtinę plokštumos dalį, apribotą paprastąja uždarąja laužte, vadiname daugiakampiu.

25.1. Iškilieji ir neiškilieji daugiakampiai

APIBRĖŽIMAS
Jei per bet kurią daugiakampio kraštinę nubrėžus tiesę daugiakampis lieka vienoje tiesės pusėje, tai jis vadinamas iškiluoju. Jeigu yra nors viena daugiakampio kraštinė, kurią pratęsus iki tiesės daugiakampis padalijamas į dvi ar daugiau dalių, tai toks daugiakampis vadinamas neiškiluoju.

a) brėžinyje pavaizduotas iškilasis daugiakampis, o b) brėžinyje — neiškilasis daugiakampis, nes tiesė, einanti per PR, dalija daugiakampį į dvi dalis.
Kai daugiakampis nėra iškilasis, vienas ar keli jo kampai yra išvirkštiniai. Pavyzdžiui, b) brėžinyje pavaizduoto neiškilojo daugiakampio kampai su viršūnėmis R ir T yra išvirkštiniai.

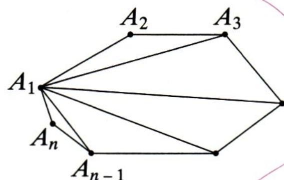




TEOREMA

Iškilojo n-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$.

Duota: $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ — iškilasis n-kampis.
Įrodyti: $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \cdots + \angle A_{n-1} + \angle A_n =$
$= 180°(n-2)$.



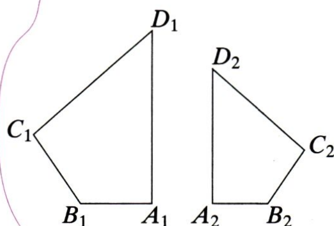
Įrodymas. Viršūnę A_1 įstrižainėmis sujunkime su kitomis viršūnėmis. Gausime $n-2$ trikampius, kurių visų kampų suma lygi n-kampio kampų sumai. Kadangi trikampio kampų suma lygi $180°$, todėl n-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$.
Figūrų lygumo sąvoką aptarėme 23.4. skyrelyje.
Du n-kampius vadiname lygiais, jei juos galima sutapdinti uždėjus vieną ant kito. Kitaip tariant, du n-kampiai yra lygūs, jei kiekvieną pirmojo n-kampio kraštinę atitinka jai lygi antrojo kraštinė, gretimas kraštines atitinka gretimos kraštinės ir atitinkami daugiakampių kampai yra lygūs.

Užduotis. Nubraižykite du daugiakampius (pavyzdžiui, keturkampius), kad kiekvieną pirmojo daugiakampio kraštinę atitiktų jai lygi antrojo daugiakampio kraštinė, gretimas vieno daugiakampio kraštines atitiktų gretimos kito daugiakampio kraštinės, tačiau daugiakampiai būtų nelygūs.

Žinome, kokius trikampius vadiname panašiaisiais. Analogiškai apibrėžiame ir daugiakampių panašumo sąvoką.

APIBRĖŽIMAS

Sakome, kad vienas n-kampis yra panašus į kitą, jei kiekvieną pirmojo n-kampio kampą atitinka jam lygus antrojo n-kampio kampas, o atitinkamos kraštinės yra proporcingos. Atitinkamų kraštinių ilgių santykį vadiname panašumo koeficientu.



$\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$, $\angle D_1 = \angle D_2$;

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = \frac{D_1A_1}{D_2A_2} = k;$$

$A_1B_1C_1D_1$ panašus į $A_2B_2C_2D_2$,
k yra panašumo koeficientas.

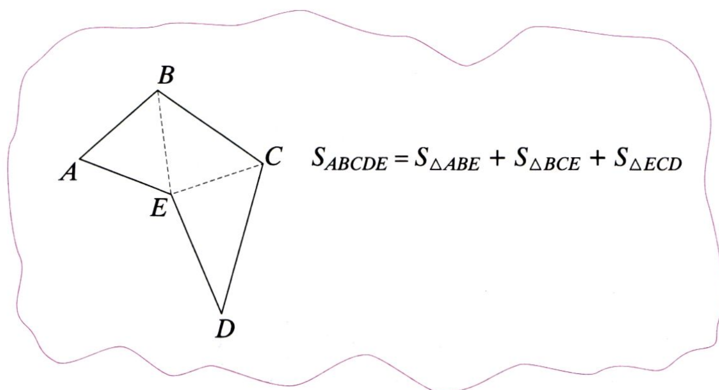
$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{C_2D_2}{C_1D_1} = \frac{D_2A_2}{D_1A_1} = \frac{1}{k};$$

$A_2B_2C_2D_2$ panašus į $A_1B_1C_1D_1$,
$\frac{1}{k}$ yra panašumo koeficientas.

TEOREMA

Jei vienas daugiakampis yra panašus į kitą ir k yra panašumo koeficientas, tai šių daugiakampių perimetrų santykis lygus k, o plotų santykis lygus k^2.

Kai duoti du vienas į kitą panašūs daugiakampiai ir yra nesvarbu, kurį iš jų laikyti pirmuoju, tiesiog sakome, kad yra du panašūs daugiakampiai.
Kadangi daugiakampiai yra labai įvairūs, tai ir visiems jiems tinkančios ploto formulės nėra. Tačiau bet kurį daugiakampį visada galima suskaidyti į trikampius, o daugiakampio plotą apskaičiuoti sudedant atitinkamų trikampių plotus.

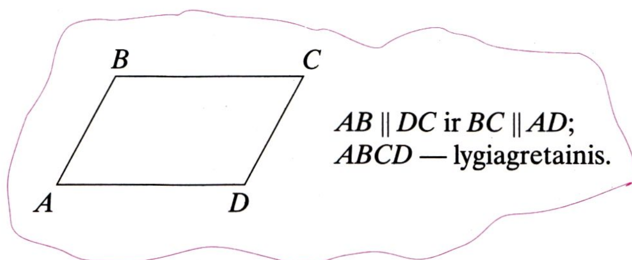


25.2. Lygiagretainis ir jo savybės

Panagrinėsime keturkampius. Jų yra visokių, todėl tėra nedaug savybių, būdingų jiems visiems. Geriausia nagrinėjant keturkampius išskirti atskiras jų rūšis. Viena iš jų — lygiagretainiai.

APIBRĖŽIMAS

Keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, vadinamas lygiagretainiu.



Lygiagretainis yra iškilasis keturkampis.

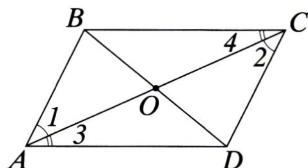
Suformuluosime teoremą apie kitas jo savybes.

TEOREMA

1) Lygiagretainio priešingieji kampai yra lygūs.

2) Lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios.

3) Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau.



Duota: $ABCD$ — lygiagretainis.

Įrodyti: 1) $\angle BAD = \angle BCD$; $\angle ABC = \angle ADC$;

2) $AB = DC, BC = AD$;

3) $AO = OC, BO = OD$.

Įrodymas. Pažymėję kampus, kuriuos sudaro įstrižainė AC su kraštinėmis AD ir BC, gauname dvi poras vidaus priešinių kampų tarp lygiagrečių tiesių ir kirstinės. Todėl $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Tada $\triangle ABC = \triangle ADC$ pagal trikampių, turinčių po lygią kraštinę ir atitinkamai lygius kampus prie jos, lygumo požymį. Iš trikampių lygumo gauname $\angle ABC = \angle ADC, AB = CD, AD = BC$. Sudėję lygybių $\angle 1 = \angle 2$ ir $\angle 3 = \angle 4$ kairiąsias ir dešiniąsias puses gausime $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ arba $\angle BAD =$ $= \angle BCD$.

Trikampiai ABO ir CDO taip pat lygūs, nes jie turi po lygią kraštinę $AB = CD$ ir lygius kampus prie jos: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ABO = \angle ODC$. Kadangi $\triangle ABO = \triangle CDO$, tai $AO = OC, BO = OD$.

Teorema įrodyta.

„Atpažinti“ lygiagretainį galima ne tik pagal jo priešingųjų kraštinių lygiagretumą. Suformuluosime teiginius, atvirkštinius teoremos apie lygiagretainio savybes teiginiams. Šiuos teiginius vadinsime lygiagretainio požymiais.

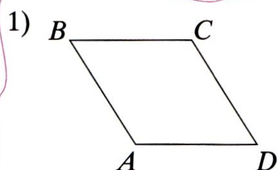
Lygiagretainio požymiai

TEOREMA

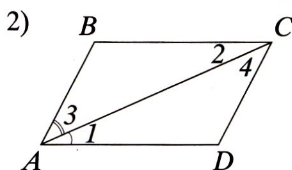
1) Keturkampis, kurio kiekvieni du priešingieji kampai lygūs, yra lygiagretainis.

2) Keturkampis, kurio kiekvienos dvi priešingosios kraštinės lygios, yra lygiagretainis.

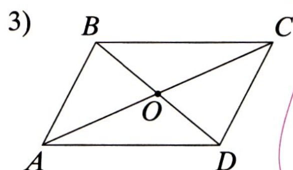
3) Keturkampis, kurio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, yra lygiagretainis.



Duota: $\angle A = \angle C$,
$\angle B = \angle D$.
Įrodyti: $ABCD$ yra lygiagretainis.



Duota: $AB = DC$,
$BC = AD$.
Įrodyti: $ABCD$ yra lygiagretainis.



Duota: $AO = OC$,
$BO = OD$.
Įrodyti: $ABCD$ yra lygiagretainis.

Įrodymas. 1) Nusibraižę bet kokį neiškiląjį keturkampį matytume, kad į vieną priešingųjų kampų porą įeina išvirkštinis kampas. Kampai tokioje poroje negali būti lygūs. Vadinasi, keturkampis, tenkinantis teoremos sąlygą, yra iškilasis. Keturkampio vidaus kampų suma lygi 360°, taigi $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Kadangi $\angle A = \angle C$ ir $\angle B = \angle D$, tai $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$ ir $\angle C + \angle B + \angle C + \angle B = 360°$. Iš čia $\angle A + \angle B = 180°$ ir $\angle B + \angle C = 180°$.

Jei dvi tieses kertant trečiąja gautų vidaus vienašalių kampų sumos lygios 180°, tai tiesės yra lygiagrečios. Vadinasi, $AB \parallel CD$ ir $BC \parallel AD$. Taigi $ABCD$ pagal apibrėžimą yra lygiagretainis.

2) Panagrinėję neiškiląjį keturkampį galėtume įsitikinti, kad teoremos sąlygos negali būti patenkintos. Taigi pakanka nagrinėti iškiląjį keturkampį, tenkinantį teoremos sąlygas, žr. 2) brėžinį. Nubrėžkime jo įstrižainę AC ir panagrinėkime trikampius ABC ir ADC. Jie turi bendrą kraštinę AC ir dvi atitinkamai lygių kraštinių poras: $AB = CD$, $BC = AD$.

Vadinasi, $\triangle ABC = \triangle ADC$. Iš šių trikampių lygumo: $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 3 = \angle 4$. Remdamiesi dviejų tiesių lygiagretumo požymiu pagal vidaus priešinius kampus gauname: $BC \parallel AD$ ir $AB \parallel CD$. Taigi $ABCD$ pagal apibrėžimą yra lygiagretainis.

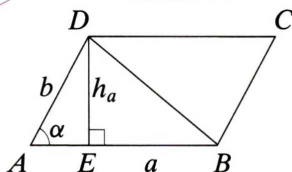
3) Įrodyti šį požymį galime taip. Pastebėkime, kad keturkampis, tenkinantis teoremos sąlygą, yra būtinai iškilasis (neiškilojo keturkampio įstrižainės iš viso nesikerta!). Nagrinėkime 3) brėžinį. Įsitikinę, kad $\triangle AOD = \triangle BOC$, gauname $\angle BCA = \angle CAD$. Pasinaudoję tiesių lygiagretumo požymiu gauname $AD \parallel BC$. Analogiškai galima įrodyti, kad $AB \parallel CD$. Taigi $ABCD$ — lygiagretainis.

Teoremoje išvardyti lygiagretainio požymiai ne vieninteliai, jų yra ir daugiau.

Užduotis. Įrodykite tokį lygiagretainio požymį:
Jeigu keturkampio dvi priešingosios kraštinės yra lygios ir lygiagrečios, tai toks keturkampis yra lygiagretainis.

Išvesime lygiagretainio ploto formules.

TEOREMA
Lygiagretainio plotas lygus kraštinės ilgio ir atstumo iki jai priešingos kraštinės (aukštinės ilgio) sandaugai.
Lygiagretainio plotas lygus gretimų kraštinių ilgių ir kampo tarp tų kraštinių sinuso sandaugai.



Duota: $ABCD$ — lygiagretainis,
$AB = a$, $AD = b$, $DE \perp AB$, $DE = h_a$,
$\angle BAD = \alpha$.
Įrodyti: $S_{ABCD} = ah_a$;
$S_{ABCD} = ab\sin\alpha$.

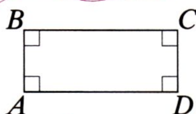
Įrodymas. Lygiagretainį sudaro du lygūs trikampiai: $\triangle ABD = \triangle BCD$. Taigi $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ABD}$. Įstatę į šią lygybę $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah_a$ bei $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ gausime tas lygiagretainio ploto formules, kurias reikia įrodyti.

25.3. Stačiakampis, rombas ir kvadratas

Šiame skyrelyje panagrinėsime lygiagretainius, kurie, be bendrųjų, turi ypatingų, tik jiems būdingų savybių.

Stačiakampis

APIBRĖŽIMAS
Lygiagretainis, kurio visi kampai statūs, vadinamas stačiakampiu.

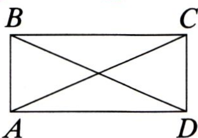


$ABCD$ — stačiakampis.

Stačiakampis yra lygiagretainis, todėl jis turi ir visas lygiagretainio savybes, kurias išvardijome ankstesniajame skyrelyje.

Be šių savybių, stačiakampis turi dar vieną jam būdingą savybę.

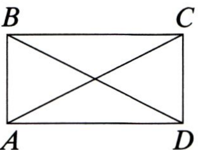
TEOREMA
Stačiakampio įstrižainės yra lygios.



Duota: $ABCD$ — stačiakampis.
Įrodyti: $AC = BD$.

Įrodymas. Trikampiai BAD ir ADC turi po lygų kampą $\angle BAD = \angle ADC$ ir po lygią kraštinę $AB = CD$, o kraštinė AD — bendra.
Vadinasi, $\triangle BAD = \triangle ADC$. Iš šių trikampių lygumo gauname: $AC = BD$. Teorema įrodyta.

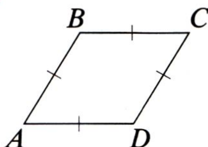
Užduotis. Įrodykite tokį stačiakampio požymį: „Jei lygiagretainio įstrižainės lygios, tai tas lygiagretainis yra stačiakampis“.



Duota: $ABCD$ — lygiagretainis; $AC = BD$.
Įrodyti: $ABCD$ — stačiakampis.

Rombas

APIBRĖŽIMAS
Lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas rombu.

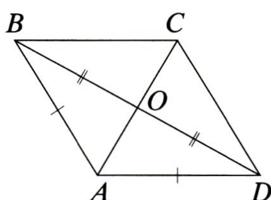


$AB \parallel CD$,
$BC \parallel AD$,
$AB = BC = CD = AD$;
$ABCD$ — rombas.

Rombas yra lygiagretainis, todėl jis turi ir visas lygiagretainio savybes.

Suformuluosime vieną įstrižainių savybę, kurią turi tik rombai.

TEOREMA
Rombo įstrižainės yra statmenos viena kitai ir dalija rombo kampus pusiau.



Duota: $ABCD$ — rombas.
Įrodyti: $AC \perp BD$,
$\angle BAC = \angle DAC$,
$\angle ABD = \angle DBC$,
$\angle ACB = \angle ACD$,
$\angle ADB = \angle CDB$.

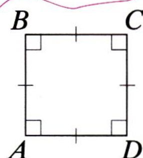
Įrodymas. Nagrinėkime trikampį ABD. Jis yra lygiašonis, nes $AB = AD$. Kadangi rombo (kaip kiekvieno lygiagretainio) įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, tai $BO = OD$. AO yra į lygiašonio trikampio pagrindą BD nubrėžta pusiaukraštinė. Taigi AO yra ir į tą pagrindą nuleista aukštinė, ir iš viršūnės kampo A nubrėžta pusiaukampinė. Iš čia:

$$AC \perp BD \text{ ir } \angle BAC = \angle DAC.$$

Nagrinėjant kitus lygiašonius trikampius analogiškai įrodoma, kad įstrižainė AC dalija kampą C pusiau, o įstrižainė BD — kampus B ir D pusiau.

Kvadratas

APIBRĖŽIMAS
Keturkampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai statūs, vadinamas kvadratu.

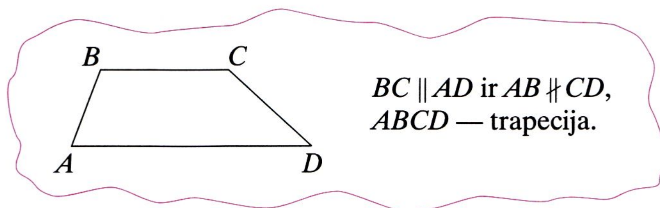


$ABCD$ — kvadratas.

Kadangi kvadratas kartu yra ir lygiagretainis, ir stačiakampis, ir rombas, tai jis turi visas lygiagretainio, stačiakampio ir rombo savybes. Išvardykime jas:
1) Visi kvadrato kampai yra statūs.
2) Visos kvadrato kraštinės yra lygios.
3) Kvadrato įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau.
4) Kvadrato įstrižainės yra lygios.
5) Kvadrato įstrižainės yra statmenos viena kitai ir dalija kvadrato kampus pusiau.

25.4. Trapecija

APIBRĖŽIMAS
Keturkampis, kurio dvi priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi — nelygiagrečios, vadinamas trapecija.

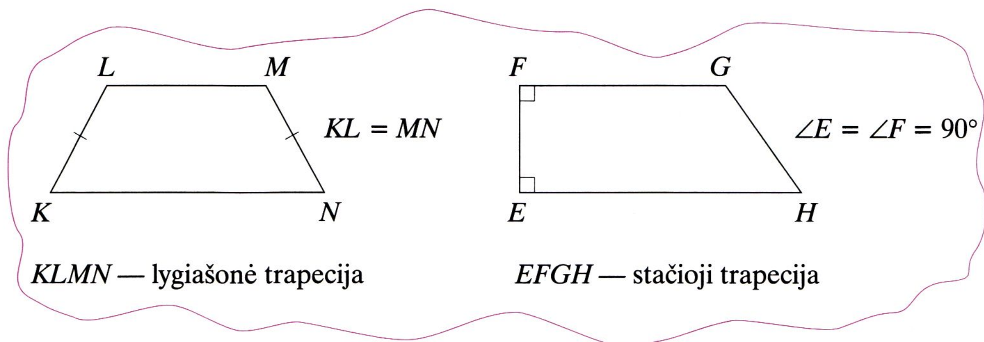


Trapecija yra iškilasis keturkampis.

Lygiagrečios trapecijos kraštinės vadinamos pagrindais, o nelygiagrečios — šoninėmis kraštinėmis.

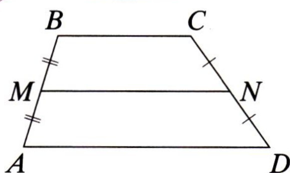
Trapecija, kurios šoninės kraštinės lygios, vadinama lygiašone trapecija.

Trapecija, kurios viena šoninė kraštinė yra statmena pagrindams, vadinama stačiąja trapecija.



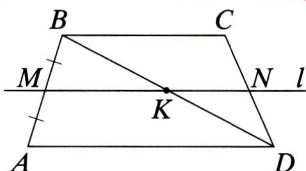
APIBRĖŽIMAS
Atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus, vadinama trapecijos vidurine linija.

TEOREMA
Trapecijos vidurinė linija yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.



Duota: $ABCD$ trapecija,
$AM = MB$, $DN = NC$.
Įrodyti: $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$;
$MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Įrodymas. Trapecijos vidurinė linija yra atkarpa, jungianti šoninių kraštinių vidurio taškus. Per vieną iš jų, pavyzdžiui, M, nubrėžkime tiesę l, lygiagrečią pagrindams. Jeigu ši tiesė dalija kitą šoninę trapecijos kraštinę pusiau, tai vidurinė linija yra šioje tiesėje, taigi yra lygiagreti pagrindams. Tegu l kerta kraštinę CD taške N. Reikia įrodyti, kad $DN = CN$.



Pritaikę Talio teoremą kampui ABD ir lygiagrečioms tiesėms l bei AD iš $AM = MB$ gausime $DK = KB$. Pritaikę Talio teoremą kampui BDC ir lygiagrečioms tiesėms l ir BC iš $DK = KB$ gausime $DN = CN$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pastebėkime, kad trapecijos vidurinei linijai teisinga lygybė

$$MN = MK + KN,$$

čia MK, KN yra $\triangle ABD$ ir $\triangle BDC$ vidurinės linijos. Pagal trikampio vidurinės linijos savybę gausime

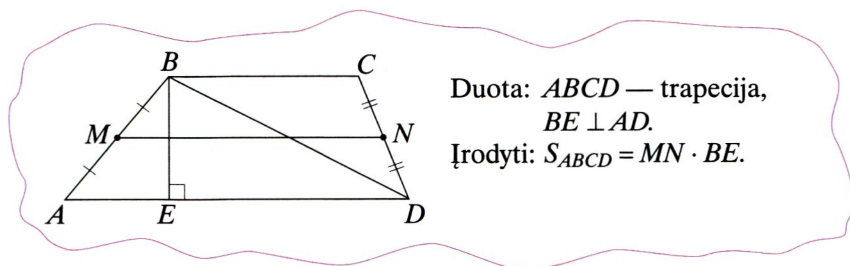
$$MN = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \\ = \frac{AD + BC}{2}.$$

Teorema įrodyta.

Pastaba. Kitas trapecijos vidurinės linijos teoremos įrodymas pateiktas skyriuje „Plokštumos vektoriai“.

Išvesime trapecijos ploto formulę. Trapecijos aukštine vadinamas statmuo, nuleistas iš viršūnės į prieš ją esantį pagrindą.

TEOREMA
Trapecijos plotas lygus trapecijos vidurinės linijos ir aukštinės ilgių sandaugai.



Įrodymas. Nubrėžę trapecijos įstrižainę BD padalysime trapeciją į du trikampius, todėl

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}.$$

Trikampių ABD ir BCD aukštinės, nuleistos į pagrindus AD ir BC lygios BE, taigi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot BE + \frac{1}{2}BC \cdot BE = \\ = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE.$$

Kadangi trapecijos vidurinės linijos ilgis lygus pagrindų ilgių sumos pusei, tai

$$\frac{AD + BC}{2} = MN.$$

Vadinasi,

$$S_{ABCD} = MN \cdot BE.$$

26. Apskritimas ir skritulys

26.1. Apskritimo stygos ir liestinės

Pagrindinės plokštumos geometrijos figūros: taškai, tiesės, atkarpos, kampai, daugiakampiai, o taip pat — apskritimai ir skrituliai. Prisiminkime pastarųjų apibrėžimus.

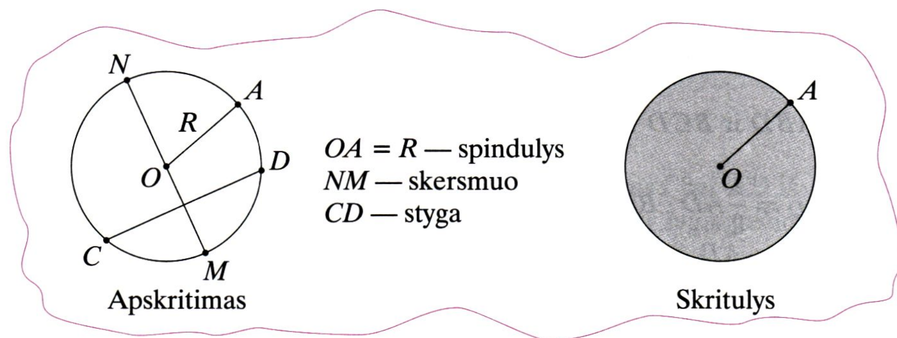
Apskritimu vadinama figūra, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško (apskritimo centro).

Skrituliu vadinama baigtinė plokštumos dalis, apribota apskritimu. Apskritimo taškai laikomi taip pat priklausančiais skrituliui.

Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama *styga.*

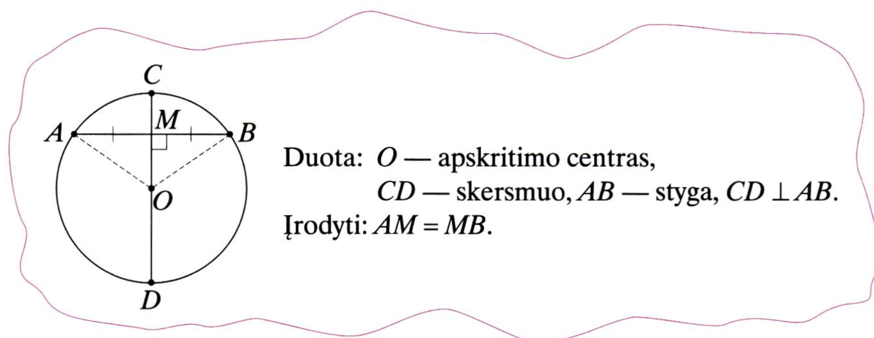
Styga, einanti per apskritimo centrą, vadinama *skersmeniu.*

Atkarpa, jungianti apskritimo centrą su kuriuo nors apskritimo tašku, vadinama *apskritimo spinduliu.*



Kiekvienas skersmuo dalija apskritimą į dvi lygias dalis. Skersmuo taip pat dalija pusiau visas stygas, kurios yra jam statmenos.

TEOREMA
Apskritimo skersmuo, statmenas stygai, dalija ją pusiau.

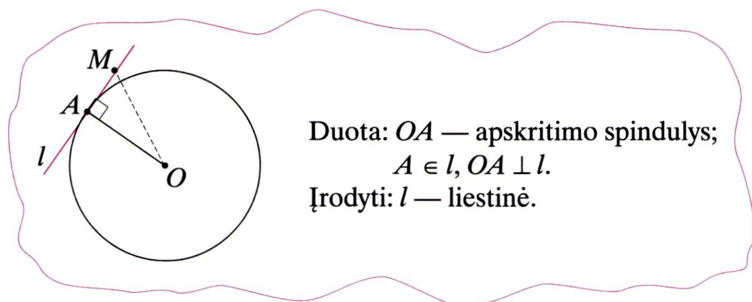


Įrodymas. Sujungę apskritimo centrą O su stygos AB galais gausime lygiašonį trikampį OAB. Kadangi OM yra šio trikampio aukštinė, išvesta į pagrindą, tai ji yra ir pusiaukraštinė. Taigi $AM = MB$.

APIBRĖŽIMAS
Tiesė, turinti su apskritimu tik vieną bendrą tašką, vadinama apskritimo liestine.

Kaip nubrėžti apskritimo liestinę pasirinktame taške? Į šį klausimą atsako tokia teorema.

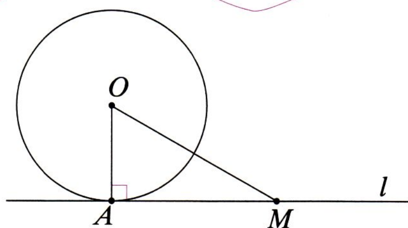
TEOREMA
Tiesė, einanti per apskritimo spindulio galą, priklausantį apskritimui, ir statmena tam spinduliui, yra apskritimo liestinė.



Įrodymas. Tegul M — bet kuris kitas tiesės l taškas. Kadangi OA yra statmuo į tiesę l, tai OM — pasviroji ir $OM > OA$, nes stačiojo trikampio įžambinė visada ilgesnė už statinį. Vadinasi, visi tiesės l taškai, išskyrus tašką A, yra šalia apskritimo. Taigi l — apskritimo liestinė.

Vadinasi, per kiekvieną apskritimo tašką galima nubrėžti liestinę. Vieną ar daugiau? Atsakymą rasti padeda tokia teorema.

TEOREMA
Apskritimo liestinė yra statmena per lietimosi tašką išvestam to apskritimo spinduliui.



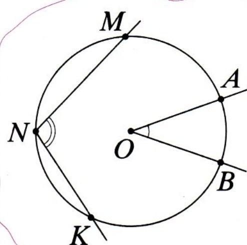
Duota: l — liestinė;
A — lietimosi taškas.
Įrodyti: $OA \perp l$.

Įrodymas. Kadangi l yra liestinė, tai ji negali turėti su apskritimu kito bendro taško. Negali tiesės l taškas būti apskritimo viduje — tada tiesė kirstų apskritimą dar viename taške. Vadinasi, visi tiesės l taškai, išskyrus tašką A, yra apskritimo išorėje. Todėl paėmus bet kurį kitą tiesės l tašką M, turėsime $OM > OA$. Kadangi OA yra trumpiausia iš atkarpų, jungiančių tašką O su tiesės l taškais, tai OA yra statmuo tiesei l. Įrodėme, kad $OA \perp l$.

Teorema tvirtina, kad apskritimo liestinė eina per apskritimo tašką ir yra statmena spinduliui, jungiančiam šį tašką su apskritimo centru. Kadangi per atkarpos tašką galima nubrėžti vienintelį statmenį atkarpai, tai ir liestinė vienintelė.

APIBRĖŽIMAS

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas centriniu to apskritimo kampu. Kampas, kurio viršūnė yra ant apskritimo, o kraštinės kerta tą apskritimą, vadinamas įbrėžtu į apskritimą arba tiesiog įbrėžtiniu kampu.



$\angle AOB$ — centrinis,
$\angle MNK$ — įbrėžtinis.

Taigi centrinį apskritimo kampą sudaro du apskritimo spinduliai, o įbrėžtinį — dvi stygos, nubrėžtos iš to paties taško.

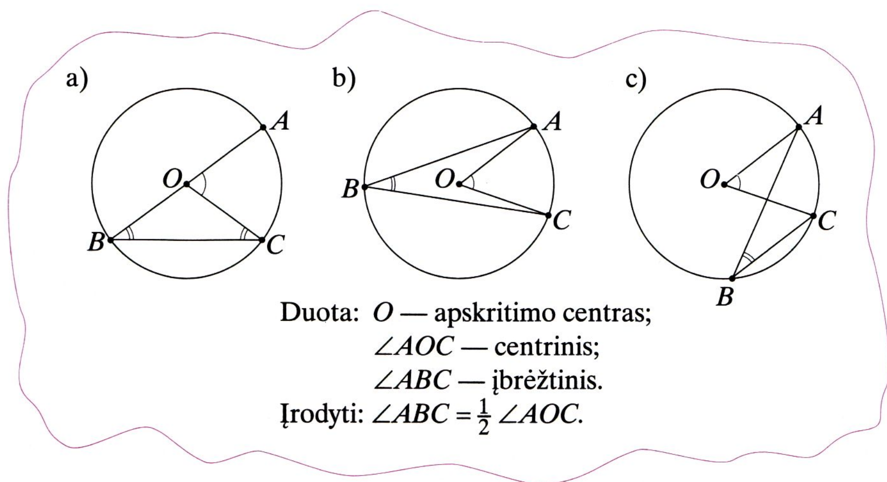
Sakoma, kad centrinį kampą AOB atitinka lankas AB.

Kadangi kampai paprastai matuojami laipsniais, tai ir lanko didumą kartais būna patogu nurodyti laipsniais.

Pavyzdžiui, brėžinyje pateiktas $\angle AOB = 40°$, tai ir $\smile AB = 40°$.

Sakome, kad apskritimo lanko didumas laipsniais lygus jį atitinkančio centrinio kampo didumui laipsniais.
Jei kampas MNK yra įbrėžtinis, o N yra jo viršūnė, tai sakysime, kad MNK remiasi į lanką MK.

TEOREMA
Jei įbrėžtinis ir centrinis kampai remiasi į tą patį lanką, tai įbrėžtinio kampo didumas lygus pusei centrinio kampo didumo.



Įrodymas. a) atveju gauname lygiašonį trikampį OBC. Kampas AOC yra jo priekampis, todėl lygus jam negretutinių kampų sumai:

$$\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle ABC,$$

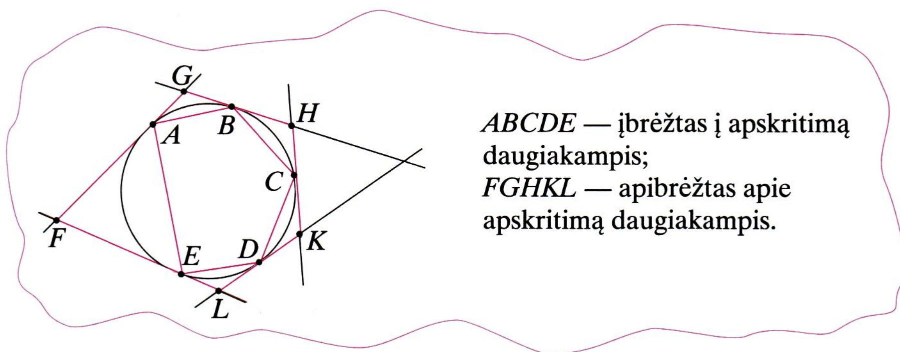
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

b) ir c) atvejais reikalaujamą lygybę galima įrodyti papildžius brėžinį skersmeniu, einančiu per tašką B.

Jei kampas ABC yra įbrėžtinis ir B yra jo viršūnė, tai šio kampo didumas laipsniais lygus lanko AC didumo laipsniais pusei. Todėl dažnai sakoma, kad įbrėžtinis kampas matuojamas puse lanko, į kurį jis remiasi. Pavyzdžiui, įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į pusės apskritimo dydžio lanką, yra status.

26.2. Apskritimai ir daugiakampiai

Nusibraižykime kokį nors apskritimą ir pasižymėkime ant jo kelis taškus.

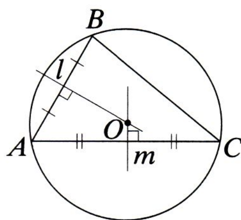


Nuosekliai sujungę pažymėtus taškus stygomis gausime įbrėžtą į apskritimą daugiakampį. Jeigu per pažymėtus taškus nubrėšime apskritimo liestines, tai jos susikirsdamos sudarys daugiakampį, kuris „apgaubia" apskritimą.

Jeigu visos daugiakampio viršūnės yra viename apskritime, tai sakysime, kad daugiakampis įbrėžtas į apskritimą arba apskritimas apibrėžtas apie daugiakampį. Jeigu visos daugiakampio kraštinės liečia apskritimą, tai sakysime, kad daugiakampis apibrėžtas apie apskritimą arba apskritimas įbrėžtas į daugiakampį.

TEOREMA
Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti vienintelį apskritimą. Šio apskritimo centras yra statmenų, dalijančių trikampio kraštines pusiau, susikirtimo taške.

Įrodymas. Apie trikampį ABC galėsime apibrėžti apskritimą, jei yra taškas, vienodai nutolęs nuo viršūnių. Visi taškai, vienodai nutolę nuo duotosios atkarpos galų, yra tiesėje, statmenoje atkarpai ir dalijančioje tą atkarpą pusiau (tai nesunku įrodyti remiantis stačiųjų trikampių lygumu). Taigi taškai, vienodai nutolę nuo A ir B, bus tiesėje l, o vienodai nutolę nuo A ir C — tiesėje m.

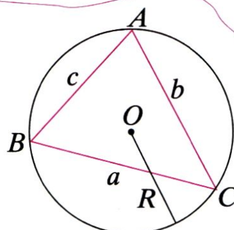


Jei O šių tiesių susikirtimo taškas, tai $OB = OA = OC$, t. y. O — apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras. Kadangi kito taško, vienodai nutolusio nuo viršūnių, nėra, tai yra tik vienas apskritimas, einantis per visas trikampio viršūnes. Įrodysime, kad apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį galime apskaičiuoti žinodami vienos trikampio kraštinės ilgį, ir kampo, esančio prieš tą kraštinę, didumą.

SINUSŲ TEOREMA
Bet kurios trikampio kraštinės ilgio ir kampo, esančio prieš tą kraštinę sinuso santykis lygus apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmens ilgiui.

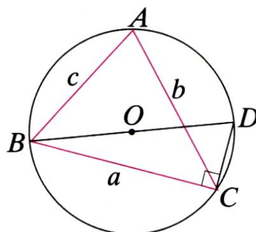
Duota: $AB = c, AC = b, BC = a$.

Įrodyti: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.



Įrodymas. Panagrinėkime tik smailiojo trikampio atvejį. Tegu O yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras. Per tašką B išveskime apskritimo skersmenį BD, sujunkime taškus C ir D. Įbrėžtinis kampas BCD remiasi į skersmenį BD, todėl yra status. Taigi

$$\sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}.$$



Tačiau $\angle BAC$ ir $\angle BDC$ yra įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį lanką, todėl yra lygūs. Taigi

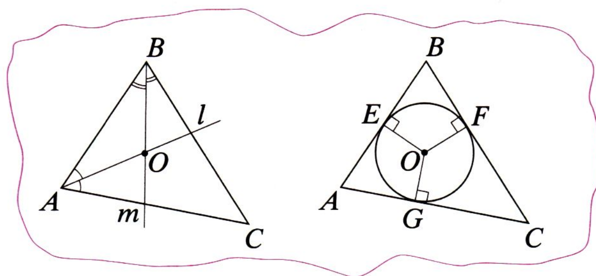
$$\sin \angle BAC = \frac{a}{2R}, \qquad \sin A = \frac{a}{2R}, \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Analogiškai įrodomos ir kitos dvi lygybės:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

TEOREMA
Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti vienintelį apskritimą. Tokio apskritimo centras yra trikampio kampus pusiau dalijančių tiesių (pusiaukampinių) susikirtimo taške.

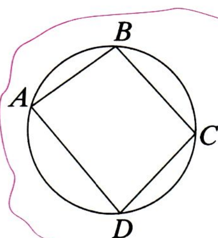
Įrodymas. Jeigu rasime tašką O, vienodai nutolusį nuo trikampio kraštinių, tai brėždami iš centro O apskritimą su spinduliu, lygiu taško O atstumui iki trikampio kraštinių, gausime trikampio kraštines AB, BC, AC liečiantį apskritimą.



Visi taškai vienodai nutolę nuo duotojo kampo kraštinių, yra tiesėje, dalijančioje šį kampą pusiau (tai nesunku įrodyti remiantis stačiųjų trikampių lygumu). Taigi visi taškai, vienodai nutolę nuo kampo BAC kraštinių AB ir AC yra tiesėje l, o taškai, vienodai nutolę nuo AB ir BC — tiesėje m. Tada tų tiesių susikirtimo taškas O yra vienodai nutolęs nuo visų trikampio kraštinių, taigi yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras. Kito taško, vienodai nutolusio nuo visų trikampio kraštinių, nėra, todėl į trikampį galime įbrėžti tik vieną apskritimą.

Taigi į kiekvieną trikampį galima įbrėžti ir apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą. Tačiau toks teiginys keturkampiams jau nebėra teisingas.

TEOREMA
Įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°.



Duota: $ABCD$ — įbrėžtinis keturkampis.
Įrodyti: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Įrodymas. $\angle BAD$ ir $\angle BCD$ yra įbrėžtiniai kampai, jie remiasi į lankus BCD ir BAD. Šių kampų didumai lygūs $\frac{1}{2}\smile BCD$ ir $\frac{1}{2}\smile BAD$, čia $\smile BCD$, $\smile BAD$ žymi lankų didumus laipsniais. Taigi

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\smile BCD + \frac{1}{2}\smile BAD = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°.$$

Likusios kampų poros didumų suma:

$$\angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C) = 360° - 180° = 180°.$$

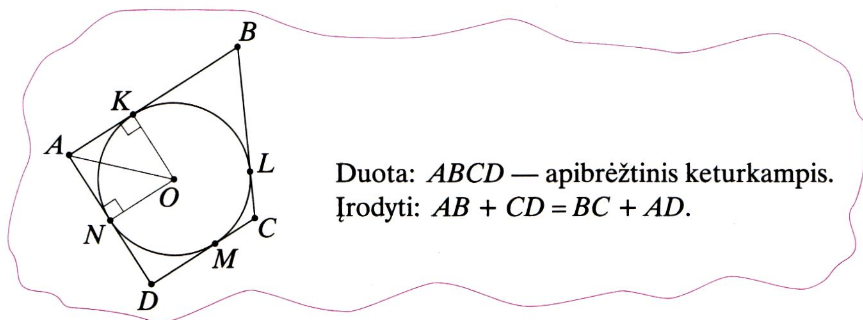
Teisinga ir atvirkštinė teorema.

TEOREMA
Jeigu keturkampio priešingųjų kampų suma lygi $180°$, *tai apie šį keturkampį galima apibrėžti apskritimą.*

Taigi ne apie kiekvieną keturkampį galima apibrėžti apskritimą. Kada tai įmanoma, galime nustatyti pagal vieną priešingų kampų porą. Jeigu jų suma lygi $180°$, tai apibrėžti apskritimą galima.

Apibrėžtiniai keturkampiai turi tokią savybę.

TEOREMA
Apibrėžtinio keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios.



Įrodymas. Pažymėkime apskritimo centrą O ir lietimosi su kraštinėmis taškus K, L, M, N. Panagrinėkime stačiuosius trikampius AKO ir ANO. Jie turi bendrą įžambinę AO ir po lygų statinį $OK = ON$. Tada iš Pitagoro teoremos gauname, kad ir kiti statiniai lygūs: $AK = AN$. Panašiai gautume lygybes $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Dabar jau nesunku užbaigti įrodymą:

$$AB + CD = AK + KB + CM + DM = AN + DN + BL + LC = AD + BC.$$

Teisinga ir atvirkštinė teorema.

TEOREMA
Jeigu keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai į keturkampį galima įbrėžti apskritimą.

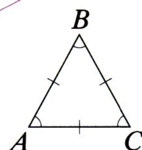
Taigi ar į keturkampį galima įbrėžti apskritimą nustatome pagal jo kraštines, o ar galima apibrėžti apskritimą — pagal jo kampus. Jeigu apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą (į keturkampį galima įbrėžti apskritimą), tai tik vieną.

26.3. Taisyklingieji daugiakampiai

Apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą ir į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą. Šias abi savybes turi ne tik trikampiai. Jas turi, pavyzdžiui, visi kvadratai ir kai kurie kiti daugiakampiai.

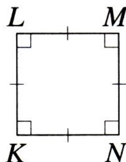
APIBRĖŽIMAS
Daugiakampis, kurio visi kampai lygūs ir visos kraštinės lygios, vadinamas taisyklinguoju daugiakampiu.

Lygiakraštis trikampis ir kvadratas yra paprasčiausi taisyklingieji daugiakampiai.



$AB = BC = AC$,
$\angle A = \angle B = \angle C$

ABC — taisyklingasis trikampis



$KL = LM = MN = NK$,
$\angle K = \angle L = \angle M = \angle N$

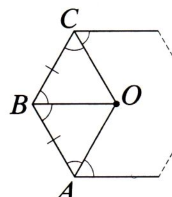
$KLMN$ — taisyklingasis keturkampis

Taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgį žymėsime a_n, o jo kampo didumą α_n.

TEOREMA
Taisyklingojo n-kampio kampas apskaičiuojamas pagal formulę $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Įrodymas. Taisyklingojo n-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$. Kadangi visi taisyklingojo n-kampio kampai lygūs α_n, tai $n\alpha_n = 180°(n-2)$, $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

TEOREMA
Apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą ir tik vieną. Šio apskritimo centras yra daugiakampio kampų pusiaukampinių susikirtimo taške.

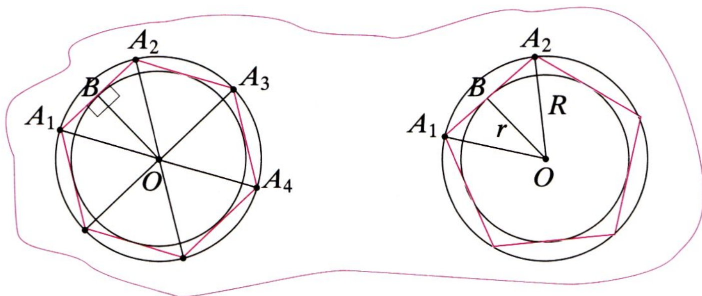


Įrodymas. Apie taisyklingąjį daugiakampį galėsime apibrėžti apskritimą, jeigu surasime tašką, vienodai nutolusį nuo visų daugiakampio viršūnių. Pasirinkime du gretimus daugiakampio kampus ir nubrėžkime šių kampų pusiaukampines. Pažymėkime kampų viršūnes A ir B, o pusiaukampinių susikirtimo tašką O. Kadangi daugiakampio kampai yra lygūs, tai $\angle OAB = \angle OBA$, todėl $\triangle AOB$ lygiašonis. Tada $OA = OB$. Pažymėkime viršūnei B gretimą viršūnę C ir sujunkime ją su tašku O. Nagrinėkime trikampius OAB ir OBC. Kraštinė OB yra bendra, $AB = BC$, $\angle OBC = \angle OBA$, taigi $\triangle OAB = \triangle OBC$ ir

$OB = OC$. Įrodėme, kad taškas O yra vienodai nutolęs nuo trijų daugiakampio viršūnių. Toliau lygindami trikampius gautume, kad O yra vienodai nutolęs nuo visų daugiakampio viršūnių, taigi — yra apibrėžto apskritimo centras.

TEOREMA
Į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą ir tik vieną. Įbrėžtinio apskritimo centras sutampa su apibrėžtinio apskritimo centru.

Įrodymas. Į daugiakampį galima įbrėžti apskritimą, jeigu yra taškas, vienodai nutolęs nuo visų jo kraštinių. Panagrinėję brėžinį galime įsitikinti, kad šią savybę turi apibrėžto apskritimo centras, t. y. daugiakampio kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas.



Taigi apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti ir į jį įbrėžti apskritimą. Išvesime šių apskritimų spindulių ilgių formules.
Nusibraižykime kokį nors taisyklingą daugiakampį ir įbrėžkime į jį bei apibrėžkime apie jį apskritimą. Tegu n — daugiakampio kraštinių skaičius, O — įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centras.
Pažymėkime B tašką, kuriame įbrėžtasis apskritimas liečia kraštinę A_1A_2, r — įbrėžtojo, R — apibrėžtojo apskritimų spindulių ilgius, a_n — daugiakampio kraštinės ilgį.
Iš stačiojo trikampio OA_1B naudodamiesi sinuso ir kosinuso apibrėžimu gauname:

$$\sin\angle A_1OB = \frac{A_1B}{A_1O}, \qquad \cos\angle A_1OB = \frac{OB}{OA_1}.$$

Tačiau $A_1B = \frac{1}{2}A_1A_2 = \frac{1}{2}a_n$, $A_1O = R$, $OB = r$, $\angle A_1OB = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$. Taigi gauname

$$\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2R}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{r}{R}$$

arba

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Sujungę daugiakampio viršūnes su tašku O padalysime daugiakampį į n lygių ir lygiašonių trikampių. Jei S — daugiakampio plotas, tai $S = nS_{A_1OA_2} = n \cdot \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot OB = n \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot r$. Taigi

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot r = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r,$$

čia P — daugiakampio perimetras.
Dar kartą užrašykime įrodytas formules.

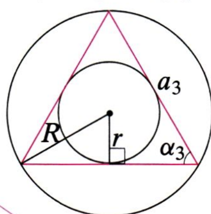
TEOREMA
Apibrėžto apie taisyklingąjį n-kampį apskritimo spindulio ilgis R, įbrėžto į taisyklingąjį n-kampį apskritimo spindulio ilgis r ir taisyklingojo n-kampio plotas S išreiškiami formulėmis:

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}, \qquad S = \frac{1}{2}P \cdot r,$$

čia a_n — taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgis, o P — perimetras.

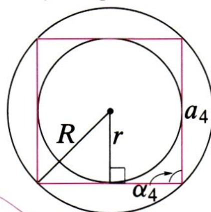
Užrašykime šias formules dažniau pasitaikantiems taisyklingiems daugiakampiams: lygiakraščiui trikampiui, kvadratui, taisyklingajam šešiakampiui.

Taisyklingasis (lygiakraštis) trikampis



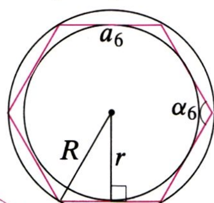
$\alpha_3 = 60^\circ$,
$R = 2r$,
$a_3 = R\sqrt{3}$ arba $a_3 = 2r\sqrt{3}$,
$S_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$

Taisyklingasis keturkampis (kvadratas)



$\alpha_4 = 90^\circ$,
$a_4 = R\sqrt{2}$ arba $a_4 = 2r$,
$S_4 = a_4^2$

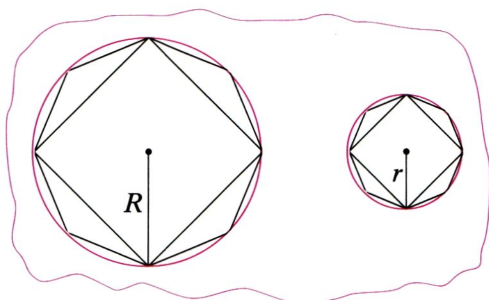
Taisyklingasis šešiakampis



$\alpha_6 = 120°$,
$a_6 = R$ arba $a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$,
$S_6 = \frac{a_6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6$

26.4. Apskritimo ilgis ir skritulio plotas

Į du apskritimus, kurių spinduliai R ir r, įbrėžkime taisyklinguosius daugiakampius, turinčius tą patį kraštinių skaičių.



Tie daugiakampiai yra panašūs, todėl jų perimetrai P_n ir p_n yra proporcingi spinduliams, t. y.

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{r} \quad \text{arba} \quad \frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}. \tag{1}$$

Daugiakampių perimetrai P_n ir p_n yra mažesni už atitinkamų apskritimų ilgius C ir c. Jeigu į apskritimus įbrėšime taisyklinguosius daugiakampius, turinčius dvigubai daugiau kraštinių (brėžinyje pavaizduoti kvadratai ir aštuonkampiai), jų perimetrai mažiau skirsis nuo apskritimų ilgių.
Neribotai dvigubinant taisyklingųjų daugiakampių kraštinių skaičių, kintamieji dydžiai P_n ir p_n artėja prie apskritimų ilgių C ir c:

$$P_n \to C \quad \text{ir} \quad p_n \to c.$$

Iš (1) lygybės gauname:

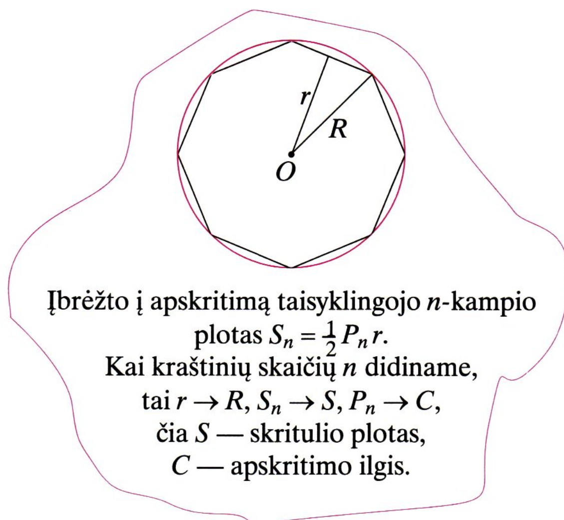
$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}. \tag{2}$$

Vadinasi, apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis yra tas pats skaičius kiekvienam apskritimui. Šį pastovų santykį žymime graikų abėcėlės raide π. Taigi

$$\frac{C}{2R} = \pi \quad \text{arba} \quad C = 2\pi R.$$

Skaičius π yra iracionalusis: $\pi = 3,14159....$
Norėdami gauti skritulio, kurio spindulys R, ploto formulę įbrėžkime į jį taisyklingąjį daugiakampį ir neribotai dvigubinkime kraštinių skaičių. Taisyklingojo daugiakampio plotas lygus jo perimetro ir įbrėžto į jį apskritimo spindulio sandaugos pusei:

$$S_n = \frac{1}{2} P_n r.$$



Neribotai dvigubinant taisyklingojo daugiakampio kraštinių skaičių, jo plotas S_n artėja prie skritulio ploto S, kintamasis P_n prie apskritimo ilgio $2\pi R$, o kintamasis r — prie skritulio spindulio R. Todėl

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

TEOREMA
Jeigu apskritimo spindulio ilgis lygus R, tai apskritimo ilgis $C = 2\pi R$.
Jei skritulio spindulio ilgis lygus R, tai skritulio plotas $S = \pi R^2$.

Kartojimo uždavinių atsakymai

16 skyrius

1. 72°; 80°; 66,(6)°; 684°.

2. $\frac{\pi}{15}$; $-\frac{2}{3}\pi$; $\frac{20}{9}\pi$; $-\frac{79}{40}\pi$.

3. a) $12{,}5\pi$ cm; $312{,}5\pi$ cm^2; b) $33{,}(3)\pi$ cm; $833{,}(3)\pi$ cm^2;
c) 20π cm; 500π cm^2; d) 18,75 cm; 468,75 cm^2.

4. $\frac{23}{60}\pi$.

5. 102°.

6.

Apskritimo spindulys	6 cm	8 cm	24 cm	$\frac{396}{\pi}$ dm	2,4 m	$\frac{120}{7\pi}$ m
Lanko didumas	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	15°	10°	$1\frac{17}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$
Lanko ilgis	2π cm	$1\frac{1}{3}\pi$ cm	2π cm	22 dm	4,1 m	10 m

7. a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$;
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$;
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;
d) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$.

8. a) $\frac{9-2\sqrt{3}}{6}$; $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$; 1; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; $-\frac{\sqrt{2}+2}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-6}{6}$.

9. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; -1; b) 1,5; 1,5; 1.

11. a) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; c) $-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; d) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; e) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; f) 1; g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. a) $\sin(-45°)$; $\sin 0°$; $\sin 10°$; $\sin 60°$; $\sin 85°$;
b) $\cos\frac{7\pi}{8}$; $\cos\frac{11\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{13\pi}{8}$; $\cos\frac{9\pi}{4}$.

13. a) $-\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$; b) 1; c) $1+\sqrt{3}$; d) 5,5.

14. a) $+$; b) $-$; c) $+$; d) $-$.

15. a) $\sin 30° - \sin 35° < \cos 30° - \cos 35°$;
b) $\operatorname{ctg} 50° - \operatorname{ctg} 10° < \operatorname{tg} 50° - \operatorname{tg} 10°$.

16. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1.

17. a) $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + n\pi$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + n\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

18. a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = 2n\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = -4 \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + 4n\pi$, $x = 4 \operatorname{arctg} 2 + 4n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{n\pi}{10}$, $x = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} 2 + \frac{n\pi}{10}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
e) $x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{5}$, $x = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3 + \frac{n\pi}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

19. a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1) + n\pi$, $x = -\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = -\operatorname{arctg} 4 + n\pi$, $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

20. a) $x = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; c) $\varnothing$; d) $\varnothing$; e) $\varnothing$; f) $\varnothing$;
g) $x = n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; h) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

21. a) $-\frac{31}{20}$; b) $\frac{8}{15}$.

22. a) $-\frac{27}{20}$; b) $\frac{29}{15}$.

23. a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

24. a) $\sin(9\alpha)$; b) $\cos(2\alpha)$.

25. a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{1}{8}$.

26. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{11}{16}$.

27. a) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = n\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + n\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

28. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{8}$; d) $\frac{\pi}{2}$.

29. a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; c) 5; d) 1; 3.

30. a) $\sin(2\alpha)$; b) $-\sin(12\alpha)$; c) $-\sin(10\alpha)$; d) $\cos(12\alpha)$.

31. a) $2\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2})$; b) $2\sin(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6})\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6})$;
c) $2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{6})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{6})$; d) $2\cos^2\frac{\alpha}{6}$;
e) $4\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2})$; f) $4\sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2})$.

33. a) $x = \frac{2}{3}n\pi$, $x = \frac{\pi}{7} + \frac{4n\pi}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi$, $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = 2n\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \frac{2}{3}n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

34. $a(1+\sqrt{3})$; $a^2(1+\sqrt{3})$.

35. 26 cm; 8 cm; $153\sqrt{3}$ cm^2.

36. 3 cm.

37. 18 cm; 22,5 cm; 9 cm.

38. 1,5 ha.

39. 20,25 dm^2.

40. a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ simetriški tiesės Ox atžvilgiu;
b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ simetriški koordinačių pradžios taško atžvilgiu;
c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ simetriški tiesės Oy atžvilgiu.

42. a) $\vec{a}(2; 0)$; b) $\vec{a}(2\sqrt{3}; 2)$; c) $\vec{a}(3; 3)$; d) $\vec{a}(3; -3\sqrt{3})$; e) $\vec{a}(0; 5{,}5)$; f) $\vec{a}(-5; -5\sqrt{3})$.

43. a) $x=3$, $y=3$; b) $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; c) $x=1$, $y=\frac{1}{3}$; d) $x=5$, $y=7$.

44. a) $(13; -1)$; b) $(8{,}5; -15{,}5)$; c) $(-5; 25)$; d) $(-114; 30)$.

45. a) $\overrightarrow{AB}(-7; -4)$; $AB=\sqrt{65}$;
b) $\overrightarrow{AB}(3; -5)$; $AB=\sqrt{34}$;
c) $\overrightarrow{AB}(-2{,}4; -9)$; $AB=\sqrt{86{,}76}$;
d) $\overrightarrow{AB}(-\frac{2}{5}; 7\frac{3}{5})$; $AB=\frac{\sqrt{1448}}{5}$.

46. a) $N(0; 2{,}6)$; b) $N(7; 2)$; c) $N(0; -1)$; d) $N(3{,}3; -5{,}5)$.

47. $M(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$.

48. $a=2$.

49. 50.

50. $(-4; 4)$.

51. 0; 576.

53. $a(x^2-2\sqrt{3}x+1)=0$, $a\neq 0$.

54. Kai $a<-3$, tai $x \geqslant \frac{2a}{a+3}$;
kai $a=-3$, tai nelygybė sprendinių neturi;
kai $a>-3$, tai $x \leqslant \frac{2a}{a+3}$.

55. 32.

56. 0.

57. a) 1; 10; b) $\log_2 10$.

58. a) $(k; 2k+2)$, $k \in \boldsymbol{R}$, $k>-2$; b) $(16; 4)$.

59. a) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; b) $(2; +\infty)$.

18 skyrius

1. a) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{27}$; nei didėjanti, nei mažėjanti;

b) 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{16}{25}$; didėjanti;

c) 3; 6; 10; 16; 26; didėjanti;

d) 0; 2; 13; 60; 251; didėjanti;

e) $\log_2 3$; $\log_2 9$; $\log_2 27$; $\log_2 81$; $\log_2 243$; didėjanti;

f) $\log_{\frac{1}{2}} 10$; $\log_{\frac{1}{2}} 100$; $\log_{\frac{1}{2}} 1000$; $\log_{\frac{1}{2}} 10\,000$; $\log_{\frac{1}{2}} 100\,000$; mažėjanti.

2. a) 1, 2, 3, 4, 5;

b) 1, 2, ..., 51;

c) 1, 2, 3;

d) 3.

3. a) $-13{,}5$; -10; $-6{,}5$;

b) 17; 10; 3;

c) $-3{,}15$; $-2{,}1$; $-1{,}05$;

d) $5\frac{2}{3}$; 6; $6\frac{1}{3}$.

4. a) $a_1 = 38{,}35$, $d = -2{,}15$;

b) $a_1 = 11$, $d = -0{,}7$;

c) $a_1 = 2{,}8$, $d = 1{,}2$;

d) $a_1 = -38{,}4$, $d = 0{,}4$.

5. a) 7; b) 12.

6. a) 3; b) 3.

7. 123 975.

8. 11.

9. -1 arba 11.

10. $a_1 = -2$, $d = 1$.

11. Po 13 val.

12. a) $x = 3$; b) tokių x reikšmių nėra.

13. a) 4; b) 7; c) 8; d) 13.

14. a) $\frac{25(5^n-1)}{4}$; b) $\frac{4(1-4^{-n})}{3}$; c) $24(2^n - 1)$; d) $\frac{45(1-3^{-n})}{2}$.

15. 2; 6; 18 arba 18; 6; 2.

16. 4; 10; 16 arba 16; 10; 4.

17. a) -1; 3; -9 arba -9; 3; -1;

b) 1; -3; 9 arba 9; -3; 1.

18. a) $85\frac{1}{3}$; b) 90; c) 518,4; d) -275; e) $\frac{5\sqrt{5}-5}{2}$; f) $\sqrt{3} + 1$.

19. a) $2\frac{2}{3}$; b) $3\frac{7}{30}$; c) $1\frac{3}{11}$; d) $\frac{17}{110}$; e) $\frac{27}{110}$; f) $10\frac{17}{450}$.

21. 7 cm.

22. Galima.

23. 70°, 70°, 70°, 150°.

24. $\frac{s-c}{2}$.

25. $4\sqrt{3} : 9 : 6\sqrt{3}$.

26. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

27. 2; $\sqrt{2}$.

30. $\frac{20}{3}$ cm.

31. 42 cm.

32. 14,5 cm; 6 cm.

33. 6,25 cm.

34. a) $\frac{2\pi h \cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

b) $\frac{\pi m^2 \sin^2\beta \cos^2\beta}{(1+\cos\beta)^2}$.

35. a) $\approx 491{,}6\,\text{cm}^2$; b) $\approx 937\,\text{cm}^2$.

36. a) $9\pi\ \text{cm}^2$; b) $12{,}5\pi$ cm.

37. a) $54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; b) $216\,\text{cm}^2$.

38. $D(-7; 12)$.

39. a) Taip; b) ne.

40. a) $6\sqrt{3}$; b) $-3{,}5$; c) 0,8; d) -1.

41. a) Vektoriai lygiagretūs ir vienakrypčiai;

b) vektoriai lygiagretūs ir priešpriešiai.

42. a) 180°; b) 135°; c) 120°; d) 150°.

43. a) 120°, 120°; b) -4.

44. (2; 3), $(-2; -3)$.

45. 23.

46. 30 km/h, 60 km/h.

47. $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$.

48. a) 1; b) $x \in [0; 1]$.

49. a) 47; b) 1.

52. a) $[\frac{1}{2}; 1]$; b) $[0; \sqrt{3}]$.

53. a) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

54. 2002.

22 skyrius

1. 36.

2. 20.

3. $\frac{1}{16}$.

4. $1 - \frac{A_{12}^5}{12^5} = \frac{89}{144} \approx 0{,}62$.

5. $\frac{1}{2}$.

6. a) 0,4; b) 0,6; c) 0,2.

7. $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{10}{5^2} = 0{,}4$.

9. 1) $\frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}$; 2) $\frac{43}{91}$, $\frac{48}{91}$.

10. $\frac{4 \cdot 3! \cdot 2!}{5!} = 0{,}4$.

11. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$.

12. a) 0,1; b) 0,5.

13. a) 0,5; b) 0,1; c) 0,4; d) 0,8.

14. 1) a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{7}$.

15. a) 0,72; b) 0,98; c) 0,02.

16. 0,28.

17. 2 cm.

18. 58 cm; 96 cm^2.

19. 5 cm.

20. 70°; 110°.

21. 100°.

22. 26 cm.

23. 25°.

24. 60 cm.

26. $-\frac{3}{2}$.

27. a) 5; b) $-2 - 6\sqrt{2}$; c) $-\sqrt{3}$; d) 1.

28. a) -14; b) 16;

29. a) 90°; b) 180°; c) 30°; d) 150°.

30. a) 120°; b) 135°.

31. a) 30°, 30°, 120°; b) 30°, 60°, 90°.

32. a) $[\frac{1}{4}; 2]$; b) $[1; 9]$; c) $[1; 2]$; d) $[1; 2]$; e) $[1; 5]$; f) $[1; 25]$.

33. a) $x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$;
b) $x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

34. a) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

b) $-\pi - \sqrt{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

35. a) $d = 8$; b) $d = 6$.

36. 6 s.

37. a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{3014}{999}$.

38. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$ s.

39. $10\sqrt{5}$ cm.

40. a) 2 val. 48 min.; b) 5 val. 36 min.; c) 1 val. 24 min.

41. 8.

ISBN 9955–491–28–0 (2 dalis)
ISBN 9955–491–23–X (2 dalys)

